

SÉRIE 1

À rendre avant le jeudi 26 septembre, 16h

Pour tous les exercices de toutes les séries une justification de votre réponse est attendue !

**Exercice 1** (4 points)

Montrez que l'ensemble

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in M(2 \times 2; \mathbb{R}) \mid a^2 + b^2 \neq 0 \right\}$$

muni du produit matriciel est un groupe. Le groupe est-il abélien ? Il est possible d'identifier ce groupe avec un groupe bien connu. Voyez-vous lequel ?

**Exercice 2** (4 points) 1. On considère le groupe  $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ .

- (a) Montrez que  $G = \{1, -1, i, -i\}$  est un sous groupe de  $\mathbb{C}^*$ .
- (b) Montrez que  $G \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$ .

2. Soit  $G$  un groupe d'ordre 4. Montrez que  $G$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  ou  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

**Exercice 3** (4 points) 1. Montrez que si  $G$  est un groupe tel que  $x^2 = e$ , pour tout  $x \in G$ , alors  $G$  est abélien.

2. Montrez que si  $G$  est un groupe fini abélien, alors  $\prod_{x \in G} x^2 = e$ .

3. Trouvez un groupe fini abélien où  $\prod_{x \in G} x \neq e$ .

**Exercice 4** (4 points) 1. Soit  $G$  un groupe et soient  $H_1, H_2$  des sous-groupes de  $G$ . Montrez que  $H_1 \cup H_2$  est un sous-groupe de  $G$  si et seulement si  $H_1 \subset H_2$  ou  $H_2 \subset H_1$ .

2. Soit  $\mathbb{R} \setminus \{5\}$  muni de la loi

$$\begin{aligned} *: \mathbb{R} \setminus \{5\} \times \mathbb{R} \setminus \{5\} &\longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{5\} \\ (x, y) &\longmapsto x * y := xy - 5x - 5y + 30. \end{aligned}$$

Est-ce que  $(\mathbb{R} \setminus \{5\}, *)$  est un groupe?