

# ÜBER DIE BASISWECHSEL

IVAN IZMESTIEV

Es war einmal ein Vektorraum  $V$ . Seine Elemente, Vektoren, hatten kurze Namen, so wie  $v$  oder  $w$ . Man konnte die Vektoren addieren und mit Skalaren multiplizieren, so dass man ganz genau wusste, welcher Vektor  $\lambda v + \mu w$  ist. Auch kompliziertere Linearkombinationen konnte man bilden.

Manchmal sammelten sich Vektoren in Gruppen, und es stellte sich heraus, dass jedesmal, wenn es mehr als  $n$  Vektoren trafen, waren sie linear abhängig.<sup>1</sup> Es gab aber auch Gruppen aus  $n$  linear unabhängigen Vektoren. Und so haben die Vektoren erkannt, dass die Dimension ihres Vektorraumes gleich  $n$  ist.

Dann kam ein Mensch und hat eine Gruppe aus  $n$  linear unabhängigen Vektoren zu Basis gewählt. Die Basisvektoren hatten die Namen

$$e_1, e_2, \dots, e_n.$$

Jeder andere Vektor  $v$  konnte jetzt auf eine einzige Weise als Linearkombination von Basisvektoren geschrieben werden:

$$(1) \quad v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n.$$

So hat jetzt jeder Vektor  $v$  einen langen Namen  $(x_1, \dots, x_n)$  erhalten. Die Basisvektoren hatten natürlich auch ihre langen Namen, so hießen sie:

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad \dots, \quad e_n = (0, \dots, 0, 1).$$

(Denn es galt zum Beispiel  $e_1 = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + \dots + 0 \cdot e_n$ .) Und so wurde der Raum  $V$  auf den Raum  $\mathbb{R}^n$  isomorph abgebildet, wobei  $e_i$  in den  $i$ -ten Standardbasisvektor überging.

Dann kam ein anderer Mensch und hat eine andere linear unabhängige Gruppe aus  $n$  Vektoren

$$e'_1, e'_2, \dots, e'_n$$

als Basis gewählt. Die Vektoren waren ganz verwirrt, denn jetzt hatte jeder Vektor  $v$  zwei lange Namen:

$$\begin{array}{ll} (x_1, \dots, x_n) & \text{in der alten Basis} \\ \text{und} & \\ (x'_1, \dots, x'_n) & \text{in der neuen Basis} \end{array}$$

Es war notwendig, eine Regel zu finden, wie man die alten Namen in die neuen transformieren kann.

Diese Regel lautet:

---

<sup>1</sup>Man konnte aus ihnen durch geschickte Linearkombination den Nullvektor bilden.

- Man schreibe die alten Namen der neuen Basisvektoren als Spalten:<sup>2</sup>

$$e'_1 = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{n1} \end{pmatrix}, \dots, e'_n = \begin{pmatrix} c_{1n} \\ c_{2n} \\ \vdots \\ c_{nn} \end{pmatrix}$$

- Man bilde daraus eine Matrix

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

und berechne ihre inverse  $C^{-1}$ .

- Nun berechnet man die neuen Koordinaten aus den alten durch

$$(2) \quad \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Die Erklärung:

Außer (1) gilt auch

$$v = x'_1 e'_1 + \cdots + x'_n e'_n.$$

Auf der Sprache der Matrizenmultiplikation können wir das wie folgt aufschreiben:

$$v = (e_1 \ e_2 \ \cdots \ e_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (e'_1 \ e'_2 \ \cdots \ e'_n) \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

Und die Matrix  $C$  wurde so definiert, dass gilt:

$$(e'_1 \ e'_2 \ \cdots \ e'_n) = (e_1 \ e_2 \ \cdots \ e_n) C$$

Folglich, gilt:

$$(e_1 \ e_2 \ \cdots \ e_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (e'_1 \ e'_2 \ \cdots \ e'_n) \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = (e_1 \ e_2 \ \cdots \ e_n) C \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

---

<sup>2</sup>Der alte Name von  $e'_j$  besteht aus seinen Koordinaten in der Basis  $e_1, \dots, e_n$ . Das ist ein ganz natürlicher Schritt, denn der zweite Mensch hat wahrscheinlich gesagt: "Du,  $(c_{11}, c_{21}, \dots, c_{n1})$ , wirst jetzt der erste Basisvektor,...". Also, die alten Namen der neuen Basisvektoren sollen uns bekannt sein.

und daraus folgt

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

was die Regel (2) impliziert.

Das war aber nicht das Ende der Geschichte. Denn ein Vektor  $v$  hat gefragt:

“Durch die Wahl der Basis  $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$  sind wir wieder zum  $\mathbb{R}^n$  geworden, und  $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$  soll jetzt die Standardbasis sein anstatt  $e_1, e_2, \dots, e_n$ .

Ich möchte jetzt gerne wissen, welche ist die Standardbasis, und was ist mein wirklicher Name?”

Darauf hat ihm  $w$  geantwortet:

“Es gibt keine Standardbasis, denn es kommt ein dritter Mensch und erklärt  $e''_1, e''_2, \dots, e''_n$  zu seiner bevorzugten Basis. Wir sind nicht  $\mathbb{R}^n$ , sondern  $V$ , und wir werden zu  $\mathbb{R}^n$  nur isomorph, indem jemand eine Basis wählt.

Und dein wirklicher Name ist  $v$ , alle diese lange Namen sind nur deine Koordinaten in dieser oder jener Basis. Menschen brauchen Koordinaten, um mit uns besser operieren zu können. Daher brauchen sie auch die Regel.”