Exercice 1. Pour les expériences suivantes, donner les modèles statistiques appropriés.

(a) On effectue n mesures $X_1, X_2, \ldots, X_n$ pour la longueur m (inconnue) d'un segment rectiligne AB. On suppose en outre que les erreurs de mesure obéissent à une loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, σ^2 inconnu.

(b) On dispose d'une mesure X_1, X_2, X_3 pour chacun des angles α, β, γ d'un triangle. On suppose une loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, σ^2 inconnu, pour les erreurs de mesure.

(c) Une urne contient θ (inconnu) billets numérotés de 1 à θ. On tire au hasard, avec remise, n billets de l'urne et on dénote par $(X_1, X_2, \ldots, X_n) =: X$ les numéros obtenus.

(d) Une urne contient θ (inconnu) billets. On tire au hasard, sans remise, n billets de l'urne que l'on colorie en rouge. Ces billets sont remis ensuite dans l'urne et le tout est brassé. On retire à nouveau, sans remise, m billets de l'urne et on dénote par X (= observation) le nombre de billets colorés dans l'échantillon.

Exercice 2. Méthode des moments et maximum de vraisemblance.
A l'aide de la méthode des moments et maximum de vraisemblance, donner un estimateur $T(X)$ pour θ, dans les cas suivants :

(a) $X_1, X_2, \ldots, X_n$ où les variables aléatoires $\{X_j\}$ sont i.i.d. de loi géometrique, qui s'écrit $\mathrm{P}(X = x) = (1-\theta)^{x-1}\theta$ pour $x = 1, 2, 3, \cdots$.

(b) $X := (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ où les variables aléatoires $\{X_j\}$ sont i.i.d. de loi uniforme sur $[0, \theta]$ avec $\theta \in \mathbb{R}_+$.

Exercice 3. Méthode des moments et maximum de vraisemblance.
A l'aide de la méthode des moments et maximum de vraisemblance, donner un estimateur $T(X)$ pour θ, dans les cas suivants :

(a) $X := (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ où les variables aléatoires $\{X_j\}$ sont i.i.d. de loi exponentielle avec paramètre $\theta > 0$.

(b) $X := (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ où les variables aléatoires $\{X_j\}$ sont i.i.d. de loi f_θ avec paramètre θ ou $f_\theta(x) = (\theta+1)x^\theta \chi_{[0,1]}(x)$.

Exercice 4. Simulation des estimateures et régression linéaire simple.

(a) Simulation des estimateures
Choisir un paramètre $\theta \in \mathbb{R}_+$ et simuler n variables de loi uniforme sur $[0, \theta]$. Comparer l'estimateur obtenu par la méthode des moments et l'estimateur du maximum de vraisemblance de l'exercice 2. Que peut-on dire si l'estimateur obtenu par la méthode des moments est plus petit que l'estimateur du maximum de vraisemblance ?

(b) Régression linéaire simple (voir Ex 3/4 Série 3).
Simuler un ensemble des points pour faire une régression linéaire simple en suivant la méthode :
- prendre un α arbitraire sur $[0, 10]$.(i.e. Unif($[0, 10]$)) ;
- prendre un β arbitraire sur $[0, 1]$.(i.e. Unif($[0, 1]$)) ;
- prendre 1000 points x_i arbitraire sur $[0, 1000.]$(i.e. Unif($[0, 1000]$)) ;
- prendre 1000 "fautes" ϵ_i arbitraire de Loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

Ensuite, calculer les valeurs $Y_i = \alpha + \beta x_i + \epsilon_i$ pour $i = 1 \cdots 1000$ comme fonction de x_i, ϵ_i.
Enfin, appliquer la méthode des moindres carrés avec $n = 10, 100, 1000$ valeurs. Calculer et commenter la différence entre α/β et leurs estimations pour $n = 10, 100, 1000$?

À rendre jusqu'au mardi 28 mars 2017, à 13h00.