Département de Mathématiques
Université de Fribourg

Année acad. 2016/17

Stefan Wenger

Analyse II

Quelques questions dans l'esprit d'un examen oral
Compléments : vendredi 19 mai 2017

Question 1: Soit $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ différentiable et telle que $|f'(x)| \geq 10$ pour tout $x \in (0,\infty)$. Montrer que f n'est pas bornée.

Question 2: Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ différentiable avec $f'(0) = -2$ et $f'(1) = 3$.

Montrer:

(a) Il existe $x \in (0,1)$ tel que $f'(x) = 0$.

(b) Pour tout $c \in (-2,3)$ il existe $x \in (0,1)$ tel que $f'(x) = c$.

Question 3:

(a) Soit $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ une fonction décroissante et telle que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [0,\infty)$. Montrer que la série $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ converge si et seulement si

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n f(t)\,dt < \infty.$$

(b) Pour quels $\alpha > 0$ est-ce que la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ converge?

Question 4: Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ partiellement dérivable avec

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \leq 10 \quad \text{et} \quad \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \leq 20$$

pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et avec $f(0,0) = 0$. Trouver la plus grande valeur que f peut atteindre en le point $(1,2)$.
Donner un exemple d'une fonction f vérifiant ces hypothèses et telle que $f(1,2)$ atteint cette borne.

Question 5: (a) Sous quelles hypothèses est-ce que la dérivée d'une série de fonctions est la série des dérivées ?
(b) Considérons la série de fonctions $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$, où $f_k(x) = \frac{\exp(-kx)}{1+k^2}$.

(i) Montrer que la série $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ converge point par point sur $[0,+\infty[$.

(ii) Montrer que pour tout $a > 0$, la série $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ est différentiable sur $(a,+\infty)$.

Question 6: Soient $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ et soit $(a_n) \subset \mathbb{R}$ une suite donnée récursivement par

$$a_{n+1} := \frac{1}{2}(a_n + a_{n-1})$$

pour tout $n \geq 2$. Est-ce que la suite (a_n) converge ? Si oui, trouver sa limite.
Indication : considérer la suite des accroissements $\delta_n = a_{n+1} - a_n$, *et écrire* (a_n) *sous la forme d'une série.*