Département de Mathématiques
Université de Fribourg

Semestre d'automne 2016

Stefan Wenger, Theo Bühler

Analyse I

Série 9

à remettre jusqu'au lundi 5 décembre à 10:00 dans le casier entre les bureaux 2.55 et 2.56 du bâtiment de physique

---

Exercice 37. Calculer en utilisant l'algorithme de division:

(a) $(x^3 - 1) : (x - 1)$;

(b) $(x^3 - 1) : (x - 2)$;

(c) $(3x^3 - 2x^2 + 4x - 3) : (x^2 + 3x + 3)$;

(d) $1 : (1 - x)$.

Exercice 38. Le polynôme $p(x) = x^3 - 12x^2 + 5x + 150$ a la racine $\alpha = 5$. Trouver toutes les racines de $p(x)$.

Exercice 39. Soit $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ un polynôme. La *derivée formelle* $p'(x)$ de $p(x)$ est définie par

$$p'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + 2a_2 x + a_1.$$

Montrer:

(a) $(p(x)q(x))' = p(x)q'(x) + p'(x)q(x)$.

(b) Si α est une racine de multiplicité k du polynôme $p(x)$, alors α est une racine de multiplicité $(k-1)$ du polynôme $p'(x)$.

(c) On écrit $p^{(0)}(x) = p(x)$ et $p^{(k+1)}(x) = (p^{(k)}(x))'$. Démontrer la formule de Leibniz:

$$(p(x)q(x))^{(k)} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} p^{(j)}(x) q^{(k-j)}(x).$$

Exercice 40. Montrer que l'identité de Pascal

$$\binom{z}{k} + \binom{z}{k+1} = \binom{z+1}{k+1}$$

est valable pour tout $z \in \mathbb{C}$ et tout $k \in \mathbb{Z}$.