Département de Mathématiques
Université de Fribourg

Semestre d'automne 2016

Stefan Wenger, Theo Bühler

Analyse I

Série 8

à remettre jusqu'au lundi 28 novembre à 10:00 dans le casier entre les bureaux 2.55 et 2.56 du bâtiment de physique

Exercice 33. Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$ est-ce que les séries ci-dessous convergent ?

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} x^k$.

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$.

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k(1-x)^k$.

Exercice 34. Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille sommable au sens que l'ensemble

$$\left\{ \sum_{i\in J} |a_i| : J \in [I] \right\} \qquad \text{où } [I] = \{J \subseteq I : \#J < \infty\}$$

est borné. Montrer que $\{i \in I : |a_i| \geq \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\}$ est fini et conclure que l'ensemble $\{i \in I : a_i \neq 0\}$ est dénombrable.

Exercice 35. En utilisant le produit de Cauchy, écrire les fractions suivantes comme séries de puissances $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$:

(a) $\dfrac{1}{(1-x)^2}$.

(b) $\dfrac{1}{(1-x)^3}$.

(c) $\dfrac{1}{(1-x)^4}$.

(d) Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$ les expressions trouvées dans (a), (b), (c) sont-elles valables?

Exercice 36. On définit $\exp(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

(a) Montrer que $\exp(x)$ converge absolument pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(b) Vérifier que $\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$.