Département de Mathématiques
Université de Fribourg

Semestre d'automne 2016

Stefan Wenger, Theo Bühler

Analyse I

Série 7

à remettre jusqu'au lundi 21 novembre à 10:00 dans le casier entre les bureaux 2.55 et 2.56 du bâtiment de physique

---

Exercice 29. Décider si les séries ci-dessous convergent ou divergent.

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$;

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k k!}{k^k}$;

(c) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)^k$;

(d) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{k^2}$.

Exercice 30. Chaque énoncé ci-dessous est faux. Trouver des contre-exemples. Comment peut-on modifier les énoncés pour les rendre vrais (et non-triviaux)?

(a) Si la suite des sommes partielles d'une série est bornée alors la série converge.

(b) Si $(a_n) \subset \mathbb{R}$ est une suite telle que $a_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ alors la série alternée $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k$ est convergente.

(c) Soit $(a_n) \subset \mathbb{R}$ une suite telle que $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si

$$\liminf_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$$

alors la série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge.

Exercice 31.

(a) Soit $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ une série qui converge absolument et soit $(c_n) \subset \mathbb{R}$ une suite convergente. Montrer que la série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k c_k$ converge absolument.

(b) Trouver une série convergente $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ et une suite convergente $(c_n) \subset \mathbb{R}$ telles que la série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k c_k$ diverge.

Exercice 32. Soit $(a_k) \subset \mathbb{R}$ une suite décroissante telle que $a_k \geq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Montrer que si la série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge alors $\lim_{k\to\infty}(ka_k) = 0$.