Département de Mathématiques | Semestre d'automne 2016
Université de Fribourg | Stefan Wenger, Theo Bühler

Analyse I

Série 6

à remettre jusqu'au lundi 14 novembre à 10:00 dans le casier entre les bureaux 2.55 et 2.56 du bâtiment de physique

Exercice 25. Soit $E = \{A \subseteq \mathbb{N} : A \text{ est fini}\}$. Montrer que E est dénombrable.
Première variante :

(a) Montrer de deux manières différentes que $\mathbb{N}^n$ est dénombrable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) On a vu qu'une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est encore dénombrable. Identifier E avec une partie de $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{N}^n$.

Deuxième variante :

(c) Soit $p_0 = 2$, $p_1 = 3$, $p_2 = 5$, $p_3 = 7$ etc. la suite des nombres premiers. Montrer que la fonction $f\colon E \to \mathbb{N}$ donnée par

$$f(A) = \prod_{n\in A} p_n$$

définit une injection de E dans $\mathbb{N}$. [Par convention, un produit vide est égal à 1, donc $f(\emptyset) = 1$.]

Exercice 26. Trouver les représentations ternaires des nombres décimaux suivants:

(a) 10, 100, 1000, 4, 44, 444, 27, 36, 81, 108, 216, 243, 729.

(b) $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{27}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{10}$.

(c) 2.718, 3.1415, $\sqrt{2}$.

Exercice 27. Soit

$$C = \left\{ x \in [0,1] : x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k},\ a_k \in \{0,2\} \text{ pour tout } k \right\}$$

l'ensemble de Cantor. Trouver une bijection explicite de $C \times C$ avec C. Déduire qu'il existe une bijection de $\mathbb{R}^n$ avec $\mathbb{R}^m$ si $n, m \geq 1$.

Exercice 28. Pour C comme dans l'exercice précédent et $x \in [0,1]$ on pose

$$f(x) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2^{k+1}}, & \text{si } x \in C \text{ est écrit comme } x = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}, \text{ avec } a_k \in \{0,2\} \\ f(y_x), & \text{si } x \notin C, \text{ où } y_x = \max\{y \in C : y < x\}. \end{cases}$$

(a) La fonction f est constante sur tout intervalle $I \subseteq [0,1]\backslash C$.

(b) La fonction est *croissante* : si $x < z$, alors $f(x) \leq f(z)$.

(c) Calculer la représentation binaire de $f(x)$ pour les nombres x de l'exercice 26 (b).

(d) Esquisser le graphe de la fonction f.

(e) Montrer que $f\colon C \to [0,1]$ est une bijection.