Département de Mathématiques
Université de Fribourg

Semestre d'automne 2016

Stefan Wenger, Theo Bühler

Analyse I

Série 5

à remettre jusqu'au lundi 7 novembre à 10:00 dans le casier entre les bureaux 2.55 et 2.56 du bâtiment de physique

---

Exercice 18. Pour chaque suite (a_n) ci-dessous trouver une sous-suite qui converge.

(a) $a_n := (-1)^n + \frac{1}{n}$;

(b) $a_n := qn - \lfloor qn \rfloor$, où $q \in \mathbb{Q}$ est positive et $\lfloor x \rfloor$ est la partie entière de x, c'est-à-dire le plus grand nombre entier $\leq x$.

Exercice 19. Soit $(a_n) \subset \mathbb{R}$ une suite. Montrer:

(a) Si (a_n) converge alors toute sous-suite (a_{n_j}) de (a_n) converge et

$$\lim_{j\to\infty} a_{n_j} = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

(b) Si les sous-suites (a_{2n}), (a_{2n+1}), et (a_{3n}) convergent alors (a_n) converge.

Exercice 20. Soit $(a_n) \subset \mathbb{R}$ une suite de nombres positifs telle que (a_n) ne possède pas de sous-suite convergente. Montrer que pour tout $M \in \mathbb{R}$, $M \geq 0$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $a_n \geq M$ pour tout $n \geq n_0$.

Exercice 21. Soit $(a_n) \subset \mathbb{R}$ une suite bornée. Montrer que $\limsup_{n\to\infty} a_n$ est le plus petit nombre $x \in \mathbb{R}$ ayant la propriété suivante: pour tout $\varepsilon > 0$ l'ensemble $\{n : a_n \geq x + \varepsilon\}$ est un ensemble fini.

Exercice 22. Montrer:

(a) Si $A \subset \mathbb{R}$ est un ensemble borné alors $\inf A = -\sup B$, où $B := \{-a : a \in A\}$.

(b) Si $(a_n) \subset \mathbb{R}$ est une suite bornée alors

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = -\limsup_{n\to\infty} -a_n.$$

(c) Si $(a_n), (b_n) \subset \mathbb{R}$ sont des suites bornées alors

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

(d) Trouver des suites (a_n) et (b_n) telles qu'on a $<$ dans (c).

Exercice 23. Trouver les limites supérieures et inférieures des suites données ci-dessous.

(a) La suite (a_n) donnée par $a_n := (-1)^n b_n$, où $(b_n) \subset \mathbb{R}$ est une suite convergente avec $\lim_{n\to\infty} b_n \geq 0$;

(b) La suite (a_n) donnée par
$$a_n := \begin{cases} b_n & n \text{ pair} \\ c_n & n \text{ impair,} \end{cases}$$
où $(b_n), (c_n) \subset \mathbb{R}$ sont des suites convergentes.

Exercice 24. Soient $(a_n), (b_n) \subset \mathbb{R}$ des suites de Cauchy. Montrer que les suites ci-dessous sont des suites de Cauchy.

(a) La suite (c_n) donnée par $c_n := |a_n - b_n|$;

(b) La suite (c_n) donnée par $c_n := a_n + b_n$;

(c) La suite (c_n) donnée par $c_n := a_n \cdot b_n$.