Département de Mathématiques
Université de Fribourg

Semestre d'automne 2016

Stefan Wenger, Theo Bühler

Analyse I

Série 4

à remettre jusqu'au lundi 24 octobre à 10:00 dans le casier entre les bureaux 2.55 et 2.56 du bâtiment de physique

---

Exercice 14. Soient $m \in \mathbb{N}$ et $r \in \mathbb{R}$ tel que $|r| < 1$, et soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite donnée par $a_n := n^m r^n$. Montrer:

(a) Il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que la suite $(|a_n|)_{n\geq n_1}$ est décroissante.

(b) Utiliser (a) pour montrer que la suite (a_n) converge vers 0. *Indication:* Montrer que la suite $b_n = n|a_n|$ est bornée.

Exercice 15. Calculer les six premières décimales de $\sqrt{7}$.

Exercice 16. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ une suite de nombres réels. On définit la suite (m_n) des moyennes par

$$m_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} a_k \qquad \text{pour tout } n \geq 0.$$

(a) Montrer que si la suite (a_n) est convergente, alors la suite (m_n) est convergente et $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} m_n$.

(b) Trouver une suite (a_n) avec $a_n \in \{0,1\}$ pour tout n, telle que $\lim\limits_{n\to\infty} m_n = \dfrac{1}{3}$.

(c) Trouver une suite non-bornée (a_n) telle que (m_n) est convergente.

Exercice 17. Pour chaque suite $(a_n)_{n\geq 1}$ ci-dessous décider si elle converge et trouver sa limite, le cas échéant.

(a) $a_n := \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$;

(b) $a_n := \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$;

(c) $a_n := (n!)^{\frac{1}{n}}$.