Département de Mathématiques
Université de Fribourg

Semestre d'automne 2016

Stefan Wenger, Theo Bühler

Analyse I

Série 3

à remettre jusqu'au lundi 17 octobre à 10:00 dans le casier entre les bureaux 2.55 et 2.56 du bâtiment de physique

---

Exercice 10. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer:

(a) $y^{n+1} - x^{n+1} = (y - x) \cdot \sum_{k=0}^{n} x^k y^{n-k}$;

(b) Si $x, y > 0$ et $n > 0$, alors $x < y \Leftrightarrow x^n < y^n$;

(c) Si $0 < x < y$ alors $0 < y^{n+1} - x^{n+1} \leq (y - x) \cdot (n + 1) \cdot y^n$.

Exercice 11. Soit $x \in \mathbb{R}$ avec $x \geq 0$ et soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 1$. Montrer qu'il existe un et un seul nombre $r \in \mathbb{R}$ avec $r \geq 0$ et tel que $r^n = x$. On note cet élément $x^{\frac{1}{n}}$ ou $\sqrt[n]{x}$.

Exercice 12. Pour chaque suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée au-dessous décider si elle converge ou diverge. Justifier les réponses.

(a) $a_n := \dfrac{1}{\sqrt{n^2 + n}}$;

(b) $a_n := \dfrac{n + 5}{n + 1}$;

(c) $a_n := (-1)^n$;

(d) $a_n := 2^{\frac{1}{n}}$;

(e) $a_n := n^2 - n$.

(f) $a_n := \sqrt{n + 1} - \sqrt{n}$.

Exercice 13. Soient $(x_n), (y_n), (z_n) \subset \mathbb{R}$ des suites telles que $x_n \leq y_n \leq z_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et telles que (x_n) et (z_n) convergent avec

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n.$$

Que peut-on dire de la suite (y_n) ? Justifier la réponse avec une preuve.