Département de Mathématiques
Université de Fribourg

Semestre de printemps 2017

Stefan Wenger

Analyse II

Série 25

à remettre jusqu'au lundi 29 mai 2017 à 13:00 dans le casier entre les bureaux 2.55 et 2.56 du bâtiment de physique

---

Exercice 102. Calculer la différentielle totale de f en chaque point où $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est différentiable pour:

(a) $f(x) = |x - p|$ où $p \in \mathbb{R}^n$ est un point fixé.

(b) $f(x) = \langle Ax, x\rangle$ où A est une matrice.

Exercice 103. Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert et soient $f, g\colon U \to \mathbb{R}$ des fonctions.

(a) Montrer que si f et g sont différentiables en un point $x_0 \in U$ alors la fonction $f \cdot g$ est différentiable en x_0. Calculer la différentielle totale de $f \cdot g$ en x_0.

(b) Soit $c\colon (a, b) \to U$ une courbe qui est différentiable en un point t_0. Montrer que si f est différentiable en $c(t_0)$ alors $f \circ c$ est différentiable en t_0. Calculer sa dérivée.

Exercice 104. Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^3}{y} & y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases}$$

(a) Esquisser le graphe de f dans un voisinage de $(0, 0)$.

(b) Montrer que f est différentiable en $(0, 0)$ au sens de Gâteaux.

(c) Est-ce-que f est continue en $(0, 0)$?

Exercice 105. Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert et $x_0 \in U$, et soit $f\colon U \to \mathbb{R}$ une fonction. Montrer que si f est lipschitzienne et si f est différentiable en x_0 au sens de Gâteaux alors f est différentiable en x_0 au sens de Fréchet.

Indication: Pour $\varepsilon > 0$ considérer un ensemble fini de vecteurs $v_1, \ldots, v_k \in S^{n-1}$ tel que pour tout $v \in S^{n-1}$ il existe i avec $|v - v_i| < \varepsilon$. Utiliser la différentiabilité au sens de Gâteaux dans les directions $v_1, \ldots, v_k$.