Département de Mathématiques
Université de Fribourg

Semestre de printemps 2017

Stefan Wenger

Analyse II

Série 24

à remettre jusqu'au lundi 22 mai 2017 à 13:00 dans le casier entre les bureaux 2.55 et 2.56 du bâtiment de physique

---

Exercice 98. Soit (X, d) un espace métrique complet et $\varphi\colon X \to X$ une application. Supposons qu'il existe $0 \leq \lambda < 1$ tel que

$$d(\varphi(x), \varphi(x')) \leq \lambda \cdot d(x, x')$$

pour tout $x, x' \in X$. Montrer qu'il existe un et un seul $x_0 \in X$ tel que $\varphi(x_0) = x_0$.

Exercice 99. Trouver les solutions des équations différentielles:

(a) $y' = y^2$ avec $y(0) = 1$.

(b) $y' = x^2 + x^2y^2$ avec $y(0) = 0$.

(c) $y' = x^3 - xy$ avec $y(0) = 0$.

(d) $y' = \cos(x + y) + \sin(x - y)$ avec $y(0) = 0$.

Indication pour (d): Séparation de variables.

Exercice 100. Soient $u, v\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ des fonctions continues avec $v(x) > 0$ pour tout $x \in [0, \infty)$. Montrer qu'il existe une et une seule solution $y\colon [0, \infty) \to (0, \infty)$ de l'équation différentielle

$$y' = u(x)y - v(x)y^2$$

avec $y(0) = \frac{1}{2}$.

Indication: Considérer la fonction $z := \frac{1}{y}$.

Exercice 101. Trouver la solution $y\colon (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$y'' = \sqrt{1 - (y')^2}$$

avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.