Département de Mathématiques
Université de Fribourg

Semestre de printemps 2017
Stefan Wenger

Analyse II

Série 23

à remettre jusqu'au lundi 15 mai 2017 à 10:00 dans le casier entre les bureaux 2.55 et 2.56 du bâtiment de physique

---

Exercice 97. On note $I := [0,1]$ et $Q = [0,1]^2$. Le but de cet exercice est de construire une courbe $\bar{c}\colon I \to Q$ dont l'image est tout Q.
Soit $0 < a < 4^{-1}$. On écrit I comme l'union de quatre intervalles fermés

$$I = I'_1 \cup I'_2 \cup I'_3 \cup I'_4$$

de longueur 4^{-1} et on écrit Q comme l'union de quatre carrés fermés

$$Q = Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3 \cup Q_4$$

de côtés 2^{-1}. Soit $I_i \subset I'_i$ l'intervalle ouvert centré de longueur a. On note $I^1 = I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup I_4$. On définit $c_1\colon I \setminus I^1 \to Q$ telle que c_1 envoie le bord $\partial I'_i$ sur le centre de Q, le bord ∂I_i sur le centre de Q_i et telle que c_1 est affine sur $I'_i \setminus I_i$. Cela définit c sur $I \setminus I^1$.
On répète cette procédure avec Q remplacé par Q_i et I par I_i pour tout $i = 1, \ldots, 4$. On écrit donc $\overline{I_i}$ comme l'union

$$\overline{I_i} = I'_{i,1} \cup \cdots \cup I'_{i,4}$$

d'intervalle fermés de longueur $4^{-1} \cdot a$ et on écrit Q_i comme l'union

$$Q_i = Q_{i,1} \cup \cdots \cup Q_{i,4}$$

de carrés fermés de côtés 2^{-2}. Soit $I_{i,j} \subset I'_{i,j}$ l'intervalle ouvert centré de longueur a^2. On note $I^2 = \cup_{i_1,i_2} I_{i_1,i_2}$ et observe que $I^2 \subset I^1$. On définit $c_2\colon I \setminus I^2 \to Q$ telle que $c_2 = c_1$ sur $I \setminus I^1$, telle que c_2 envoie le bord $\partial I'_{i,j}$ au centre de Q_i et le bord $\partial I_{i,j}$ sur le centre de $Q_{i,j}$ et telle que c_2 est affine sur $I'_{i,j} \setminus I_{i,j}$. Après n étapes on obtient une application $c_n\colon I \setminus I^n \to Q$ où $I^n = \cup_{i_1,\ldots,i_n} I_{i_1,\ldots,i_n}$ est l'union de 4^n intervalles ouverts de longueur a^n.

Exercices:

(a) Faire un dessin des deux premiers étapes de la construction ci-dessus.

(b) Montrer que

$$|c_n(t) - c_n(s)| \leq L \cdot |t - s|^\alpha$$

pour tout $t, s \in I \setminus I^n$, où $\alpha = \frac{\ln(2)}{|\ln(a)|}$ et où L est indépendant de n. On dit que c_n est (L, α)-hölderienne.

(c) On note $J := \cup_{n=1}^{\infty} (I \setminus I^n)$ et on définit $c\colon J \to Q$ tel que $c(t) := c_n(t)$ pour $t \in I \setminus I^n$. Utiliser (b) pour montrer que c envoie des suites de Cauchy à des suites de Cauchy.

(d) Montrer que c étend à une unique courbe $\bar{c}\colon I \to Q$ qui satisfait

$$|\bar{c}(t) - \bar{c}(s)| \leq L \cdot |t - s|^\alpha$$

pour tout $t, s \in I$. Montrer que $\bar{c}(I) = Q$.