Département de Mathématiques
Université de Fribourg

Semestre de printemps 2017
Stefan Wenger

Analyse II

Série 21

à remettre jusqu'au lundi 1 mai 2017 à 13:00 dans le casier entre les bureaux 2.55 et 2.56 du bâtiment de physique

---

Exercice 89. Soient (X, d) un espace métrique, $A \subset X$, et $x \in X$. Montrer:

(a) $x \in \overline{A}$ si et seulement si $A \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset$ pour tout $\varepsilon > 0$.

(b) $x \in A^\circ$ si et seulement s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset A$.

(c) $x \in \partial A$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ on a $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ et $B(x, \varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset$.

Exercice 90. Soit $V \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, convexe, borné et tel que $x \in V$ si et seulement si $-x \in V$. Montrer:

(a) La fonction $\|x\| := \inf \{r > 0 : r^{-1}x \in V\}$ définit une norme sur $\mathbb{R}^n$.

(b) $V = B(0, 1)$, où $B(0, 1)$ désigne la boule ouverte par rapport à $\| \cdot \|$.

Un ensemble $V \subset \mathbb{R}^n$ s'appelle convexe si $tx + (1 - t)y \in V$ pour tout $x, y \in V$ et $t \in [0, 1]$.

Exercice 91. Soient X et Y des espaces métriques et $f : X \to Y$ continue et bijective.

(a) Montrer que si X est compact alors f^{-1} est aussi continue.

(b) Trouver un exemple qui montre que (a) n'est pas vrai si X n'est pas compact.

Remarque: Une application bijective et continue $f : X \to Y$ s'appelle homéomorphisme si f^{-1} est continue.

Exercice 92. Montrer que tout espace métrique compact est complet.