Département de Mathématiques
Université de Fribourg

Semestre de printemps 2017

Stefan Wenger

Analyse II

Série 20

à remettre jusqu'au lundi 24 avril 2017 à 13:00 dans le casier entre les bureaux 2.55 et 2.56 du bâtiment de physique

---

Exercice 84. Esquisser les sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$ donnés ci-dessous et déterminer s'ils sont ouverts. Justifier vos réponses.

(a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > \sqrt{|x|}\}$;

(b) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, \sin(1/x)) : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$;

(c) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z > 3, z \geq -1\}$.

Exercice 85. Soit (X,d) un espace métrique. Montrer que si $x \in X$ et $r > 0$ alors

$$\bar{B}(x,r) := \{y \in X : d(x,y) \leq r\}$$

est un ensemble fermé.

Exercice 86.
Soit $C^0([-1,1])$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[-1,1]$. Pour $f \in C^0([-1,1])$ on définit

$$\|f\|_1 := \int_{-1}^{1} |f(x)|\, dx.$$

et

$$\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)| : x \in [-1,1]\}.$$

(a) Montrer que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes sur $C^0([-1,1])$.

(b) Montrer que $(C^0([-1,1]), \|\cdot\|_\infty)$ est complet, donc un espace de Banach.

(c) Montrer que $(C^0([-1,1]), \|\cdot\|_1)$ n'est pas complet.

Indication pour (c): Considérer les suite $(f_n) \subset C^0([-1,1])$ donnée par

$$f_n(x) := \begin{cases} 0 & x \in [-1,0) \\ nx & x \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \\ 1 & x \in \left(\frac{1}{n}, 1\right]. \end{cases}$$

Montrer que (f_n) est une suite de Cauchy dans $(C^0([-1,1]), \|\cdot\|_1)$ mais qu'elle n'est pas convergente dans $(C^0([-1,1]), \|\cdot\|_1)$.

Exercice 87. Soit $T\colon (V, \|\cdot\|_V) \to (W, \|\cdot\|_W)$ une application linéaire entre deux espaces normés. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes:

(i) T est continue en 0.

(ii) T est continue en tout point de V.

(iii) Il existe $C \geq 0$ tel que $\|T(v)\|_W \leq C\|v\|_V$ pour tout $v \in V$.

Exercice 88. (facultatif) Soit ℓ^∞ l'espace vectoriel des suites bornées de nombres réels, muni de la norme

$$\|(x_n)\|_\infty := \sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\}.$$

Soit $A \subset \ell^\infty$ l'ensemble défini par $A := \{\delta^k : k \in \mathbb{N}\}$, où $\delta^k := (\delta_n^k)$ est la suite donnée par $\delta_n^k = 1$ si $n = k$ et $\delta_n^k = 0$ sinon. Montrer que A est borné et fermé mais que A n'est pas compact.