Département de Mathématiques
Université de Fribourg

Semestre d'automne 2016

Stefan Wenger, Theo Bühler

Analyse I

Série 2

à remettre jusqu'au lundi 10 octobre à 10:00 dans le casier entre les bureaux 2.55 et 2.56 du bâtiment de physique

---

Exercice 6. Esquisser les parties de $\mathbb{R}$ données ci-dessous et en trouver le supremum, l'infimum, le maximum et le minimum (s'ils existent).

(a) $(-2, 1] \cup [2, 4]$.

(b) $\{x \in \mathbb{R} : |x| < 1\}$.

(c) $\{\frac{1}{n} + \frac{1}{m} : m, n \in \mathbb{N}\}$.

(d) $\{p - q : p, q \in \mathbb{Q} \cap (1, \sqrt{2})\}$.

Exercice 7. Soient $A, B \subseteq \mathbb{R}$ des parties non-vides et majorées. Montrer:

(a) $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$.

(b) Si $A \subseteq B$, alors $\sup A \leq \sup B$.

(c) La partie $C := \{a + b : a \in A, b \in B\}$ est majorée et $\sup C = \sup A + \sup B$.

Exercice 8. Montrer:

(a) Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

(b) Pour chaque $n \geq 2$, le nombre $3^{2n+1} + 2^{n-1}$ est divisible par 7.

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k = 2^{n-1} n.$$

Exercice 9.

(a) Montrer que l'inégalité de Bernoulli pour $x \geq 0$ est une conséquence de la formule du binôme.

(b) Comme (a), mais avec $-1 \leq x \leq 0$.

(c) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$ tels que $x \geq 0$ et $n \geq 2$ on a

$$(1 + x)^n \geq 1 + \frac{n^2}{4} x^2.$$

(d) Soit $\varepsilon > 0$ donné. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$ et

$$n^{\frac{1}{n}} \leq 1 + \varepsilon. \tag{1}$$

Trouver un $n \geq 2$ tel qu'on a (1) avec $\varepsilon = 10^{-2035}$.