Analyse II

Série 19

à remettre jusqu'au lundi 10 avril 2017 à 13:00 dans le casier entre les bureaux 2.55 et 2.56 du bâtiment de physique

---

Exercice 80. Trouver le rayon de convergence des séries entières suivantes:

(a) $\sum_{k=0}^{\infty} k^4 z^k$;

(b) $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k z^{2k}$;

Exercice 81. Trouver une série entière réelle $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$

(a) qui converge pour tout $x \in [-2, 2]$ et diverge pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| > 2$;

(b) qui converge pour tout $x \in [-2, 2)$ et diverge pour tout $x < -2$ et tout $x \geq 2$;

(c) qui converge pour tout $x \in (-2, 2)$ et diverge pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| \geq 2$.

Exercice 82. Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ une fonction $(n+1)$-fois continûment différentiable. Soit $x_0 \in (a, b)$ tel que $f^{(k)}(x_0) = 0$ pour $k = 1, \ldots, n$. Montrer que si n est impair et $f^{(n+1)}(x_0) < 0$ alors x_0 est un maximum local de f.

Exercice 83. Trouver la série de Taylor de la fonction

$$f(x) := \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x^2}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

autour de 0.