

## Analyse II

### Série 18

---

à remettre jusqu'au lundi 3 avril 2017 à 14:00 dans le casier entre les bureaux 2.55 et 2.56 du bâtiment de physique

---

**Exercice 76.** Pour chaque suite de fonctions  $f_n$  donnée ci-dessous esquisser le graphe de  $f_n$  et déterminer si la suite converge au sens simple vers une fonction. Si elle converge, est-ce que la convergence est même uniforme? Justifier vos réponses.

- (a)  $f_n(x) := \sin(nx)$  pour  $x \in \mathbb{R}$
- (b)  $f_n(x) := |x|^{1+\frac{1}{n}}$  pour  $x \in [-1, 1]$
- (c)  $f_n(x) := |x|^{\frac{1}{n}}$  pour  $x \in [-1, 1]$
- (d)  $f_n(x) := \sin\left(\frac{x}{n}\right)$  pour  $x \in \mathbb{R}$ .

**Exercice 77.** Soient  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction et  $L \geq 0$ . Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions  $L$ -lipschitzienne  $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Montrer que si la suite  $(f_n)$  converge au sens simple vers  $f$  alors elle converge uniformément vers  $f$ .

**Exercice 78.** Montrer que la série  $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x}{x^2+1}\right)^k$  converge uniformément sur  $\mathbb{R}$ . Calculer la dérivée de sa limite

$$f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x}{x^2+1}\right)^k.$$

**Exercice 79.** Trouver des primitives des fonctions suivantes:

- (a)  $\frac{1}{x^3+1}$ ;
- (b)  $\frac{x+2}{x^2(x^2+2)}$ .