Département de Mathématiques
Université de Fribourg

Semestre de printemps 2017
Stefan Wenger

Analyse II

Série 17

à remettre jusqu'au lundi 27 mars 2017 à 14:00 dans le casier entre les bureaux 2.55 et 2.56 du bâtiment de physique

Exercice 72. Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction R-intégrable. On définit la fonction $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ par

$$F(t) := \int_a^t f(x)dx.$$

(a) Esquisser le graphe de F pour la fonction $f\colon [0,3] \to \mathbb{R}$ donnée par $f = 3 \cdot \mathbf{1}_{[1,2]}$.

(b) Pour f général, montrer que F est lipschitzienne, i.e. il existe $L \geq 0$ tel que

$$|F(t) - F(t')| \leq L|t - t'|$$

pour tout $t, t' \in [a,b]$.

Exercice 73.

(a) Soient $\varepsilon, L > 0$. Trouver un $\delta > 0$, qui ne dépend que de ε et L, avec la propriété suivante: Pour toute fonction L-lipschitzienne $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, toute partition $P = \{0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1\}$ avec

$$\delta(P) := \max\{x_{k+1} - x_k : k = 0, \dots, n-1\} \leq \delta$$

et toute $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, \dots, n-1$, on a que

$$\left| \int_0^1 f(x)dx - \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \cdot (x_{k+1} - x_k) \right| \leq \varepsilon.$$

(b) En utilisant (a) calculer $\int_0^1 x^2\, dx$ à une erreur de $\frac{1}{10}$ près.

Exercice 74. Calculer les intégrales en utilisant la règle de substitution et l'intégration par partie:

(a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{4+5\cos(x)}\, dx$

(b) $\int_0^{\pi} \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\, dx$

(c) $\int_0^1 \frac{1}{e^x + e^{-x}}\, dx$

Exercice 75. Calculer les intégrales en utilisant la règle de substitution et l'intégration par partie:

(a) $\int_0^1 xe^{2x}\, dx$

(b) $\int_0^{\pi} x^2 \sin(x)\, dx$

(c) $\int_{-1}^0 \arccos(x)\, dx$

(d) $\int_1^e \sqrt{x} \ln(x)\, dx$