Département de Mathématiques
Université de Fribourg

Semestre de printemps 2017
Stefan Wenger

Analyse II

Série 16

à remettre jusqu'au lundi 20 mars 2017 à 14:00 dans le casier entre les bureaux 2.55 et 2.56 du bâtiment de physique

---

Exercice 68. Soit $A \subset \mathbb{R}$ un sous-ensemble et soit $f\colon A \to \mathbb{R}$ uniformément continue. Montrer:

(a) Si $(x_n) \subset A$ est une suite de Cauchy alors $(f(x_n))$ est une suite de Cauchy.

(b) Il existe $\bar{f}\colon \overline{A} \to \mathbb{R}$ continue telle que $\bar{f}|_A = f$.

Exercice 69. Soit $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } \ x = \frac{1}{2^n} \text{ pour un } n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{si } \ x \neq \frac{1}{2^n} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Esquisser le graphe de f. Montrer que f est intégrable au sens de Riemann et calculer $\int_0^1 f(x)dx$.

Exercice 70. Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a,b]$. Montrer que si $\int_a^b f(x)dx = 0$ alors $f(x) = 0$ pour tout $x \in [a,b]$.

Exercice 71. Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction croissante. Montrer que f est R-intégrable.