Département de Mathématiques
Université de Fribourg

Semestre de printemps 2017

Stefan Wenger

Analyse II

Série 15

à remettre jusqu'au lundi 13 mars 2017 à 14:00 dans le casier entre les bureaux 2.55 et 2.56 du bâtiment de physique

---

Exercice 64. Utiliser la règle de l'Hôpital pour déterminer si les limites suivantes existent et pour les calculer.

(a) $\lim_{x\to 1^+} \frac{2-\sqrt{5-x}}{1-x}$

(b) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\exp(x)+\exp(-x)-2\cos(x)}{\ln(1+x)}$

Exercice 65. Soient $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ des fonctions en escalier. Montrer que $f+g$ est une fonction en escalier et que

$$\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

Exercice 66. Pour chaque fonction $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ donnée ci-dessous, esquisser son graphe et décider si elle est une fonction en escalier. Si oui, calculer son intégrale $\int_{-1}^1 f(x)dx$.

(a) $f(x) := \lfloor 4x^2 \rfloor$, où $\lfloor a \rfloor$ est le plus grand nombre entier $\leq a$.

(b) Soit $A \subset [-1,1]$ un ensemble fini et soit

$$f(x) := \begin{cases} x & \text{si } x \in A \\ 1 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

(c)

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x = \frac{1}{2^n} \text{ pour un } n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{si } x \neq \frac{1}{2^n} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Exercice 67.

(a) Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. Montrer que si $\lambda \geq 0$ alors

$$\int_a^{b*} \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^{b*} f(x)dx.$$

(b) Trouver une fonction bornée $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ telle que

$$\int_a^{b*} -f(x)dx \neq -\int_a^{b*} f(x)dx.$$