Département de Mathématiques
Université de Fribourg

Semestre de printemps 2017

Stefan Wenger

Analyse II

Série 14

à remettre jusqu'au lundi 6 mars 2017 à 10:00 dans le casier entre les bureaux 2.55 et 2.56 du bâtiment de physique

---

Exercice 60. En utilisant les règles de calcul pour les dérivées, montrer que chaque des fonctions au-dessous est différentiable dans son domaine de définition et calculer sa dérivée.

(a) $f(x) := \sin(\cos(x^2))$;

(b) $f(x) := \sqrt{x + \sqrt{x}}$;

(c) $f(x) := \ln(\sqrt{x^2 + 1})$.

Spécifier à chaque étape quelles règles de sont calcul utilisées. On a seulement droit d'utiliser les faits établis dans le cours.

Exercice 61.

(a) Soit $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable et telle que sa dérivée f' est bornée. Montrer que f est lipschitzienne, i.e., il existe $L \geq 0$ tel que

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \text{pour tout } x, y \in (a, b).$$

(b) Montrer que les fonctions $\sin(x)$ et $\exp\left(\frac{1}{x^2+1}\right)$ sont lipschitzienne.

Exercice 62. Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ une série de puissance avec rayon de convergence $R > 0$. Montrer que la fonction

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

est différentiable sur $(-R, R)$ avec

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Exercice 63. Montrer que les fonctions ci-dessous sont injectives sur l'intervalle $(-1, 1)$ et leurs inverses sont différentiables. Esquisser les graphes de f et f^{-1}. Calculer la dérivée de f^{-1} en $y_0 = 1$:

(a) $f(x) := x^2 + 5x + 1$;

(b) $f(x) := \sin(x) + \frac{1}{2}$;

(c) $f(x) := (x + 1)^{x+2}$.