Département de Mathématiques
Université de Fribourg

Semestre d'automne 2016

Stefan Wenger, Theo Bühler

Analyse I

Série 12

à remettre (volontairement) jusqu'au mardi 6 février 2017 à 10:00 dans
le casier entre les bureaux 2.55 et 2.56 du bâtiment de physique

---

Exercice 49.
Montrer que chaque fonction ci-dessous est continue en $x_0 = 1$ en utilisant la définition de continuité par ε et δ. De plus, pour chaque fonction trouver un $\delta > 0$ qui marche pour $\varepsilon = \frac{1}{3}$.

(a) $f(x) := 3x + 5$;

(b) $f(x) := \frac{x}{x+1}$;

(c) $f(x) := \begin{cases} x-1 & \text{s'il existe } n \in \mathbb{N} \text{ t.q. } x = \frac{n+1}{n} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Exercice 50.

(a) Soit $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) \geq 0$ et $f(1) \leq 1$. Montrer qu'il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = x$.

(b) Soit $f\colon [0,2] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(2) = f(0)$. Montrer qu'il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que $f(x_0 + 1) = f(x_0)$. Trouver un exemple qui montre que la continuité est importante pour avoir cette conclusion.

Exercice 51. L'équation $\exp(x) = x^2 + 3$ a-t-elle une solution dans $\mathbb{R}$?

Exercice 52. Trouver un exemple d'une fonction continue et bornée $f\colon [0,1) \to \mathbb{R}$ qui n'a ni un minimum global ni un maximum global.

Exercice 53. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(x) \in \mathbb{Z}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Que peut-on dire de f ?

Exercice 54. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(q) = 0$ pour tout $q \in \mathbb{Q}$, où $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres rationnels. Que peut-on dire de f ?

Exercice 55. Montrer que la fonction zêta $\zeta(s) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ est continue sur l'intervalle $(1, \infty)$.
Indication: La série est normalement convergente sur (s_0, ∞) pour tout $s_0 > 1$.