Département de Mathématiques
Université de Fribourg

Semestre d'automne 2016
Stefan Wenger, Theo Bühler

Analyse I

Série 11

à remettre jusqu'au lundi 19 décembre à 10:00 dans le casier entre les bureaux 2.55 et 2.56 du bâtiment de physique

---

Exercice 45. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par

$$f(x) := \begin{cases} x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

(a) Esquisser le graphe de f ;

(b) Montrer que f est continue.

Exercice 46. Soit $D \subseteq \mathbb{R}$ un ensemble non-vide. Une fonction $f\colon D \to \mathbb{R}$ s'appelle *fonction λ-lipschitzienne* si

$$|f(x) - f(y)| \leq \lambda |x - y|$$

pour tout $x, y \in D$.

(a) Montrer que si $f\colon D \to \mathbb{R}$ est une fonction λ-lipschitzienne alors f est continue.

(b) Montrer que la fonction $f(x) = |x|$ est 1-lipschitzienne.

(c) Déterminer la plus petite constante λ telle que la fonction $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = x^2$ soit λ-lipschitzienne.

(d) Soient $0 < a < b$. Trouver la plus petite constante λ telle que $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ soit λ-lipschitzienne. Déduire que $\sqrt{x}$ n'est pas lipschitizenne sur $[0, 1]$.

Exercice 47. Soit $A \subseteq \mathbb{R}$ un ensemble non-vide et $a \in A$ un point. Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose $d_a(x) = |x - a|$ et on définit

$$d_A(x) = \inf_{a \in A} d_a(x).$$

(a) Esquisser $d_{A_k}(x)$ pour les ensembles suivants :

$$A_0 = \{0\}, \quad A_1 = [0, 1] \cup [2, 3], \quad A_2 = \mathbb{N}, \quad A_3 = \{\tfrac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}, \quad A_4 = \mathbb{Q}, \quad A_5 = C$$

où C est l'ensemble de Cantor.

(b) Montrer que $d_A(x)$ est 1-lipschitzienne.

Exercice 48.

(a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par

$$f(x) := \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}. \end{cases}$$

Montrer que f est continue en 0 et que f n'est pas continue en x_0 pour tout $x_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

(b) Esquisser la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin \mathbb{Q} \\ 1, & x = 0 \\ \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q} \text{ est une fraction réduite} \end{cases}$$

sur l'intervalle $[0, 1]$. Quels sont les points où la fonction est continue ?