Département de Mathématiques
Université de Fribourg

Semestre d'automne 2016

Stefan Wenger, Theo Bühler

Analyse I

Série 10

à remettre jusqu'au lundi 12 décembre à 10:00 dans le casier entre les bureaux 2.55 et 2.56 du bâtiment de physique

Exercice 41. Montrer que la fonction exponentielle $\exp(\cdot)$ possède les propriétés ci-dessous. Utiliser uniquement les propriétés de $\exp(\cdot)$ démontrées dans le cours :

(a) $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$;

(b) $\exp(x) = 1$ si et seulement si $x = 0$;

(c) $\exp(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$;

(d) $\exp(x) < \exp(y)$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ avec $x < y$.

(e) Calculer $\exp(1/3)$ jusqu'à une erreur plus petite que 10^{-4}.

Exercice 42. En utilisant la définition de $\cos(x)$ et $\sin(x)$ montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$:

(a) $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$;

(b) $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$.

Exercice 43. Considérer la suite de Fibonacci $F_0 = 1$, $F_1 = 1$ et $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ pour $n \geq 2$.

(a) Soit $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ le nombre d'or (l'unique solution positive de $x^2 - x - 1 = 0$). Montrer que $\left|\dfrac{F_{n+1}}{F_n} - \varphi\right| = \dfrac{1}{F_n} \cdot \dfrac{1}{\varphi^n}$.

(b) Calculer le rayon de convergence de $S(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} F_n z^n$.

(c) Montrer que $(1 - z - z^2)S(z) = 1$ à l'intérieur du cercle de convergence de $S(z)$.

(d) Trouver des constantes A, B, z_0, z_1, telles que $\dfrac{1}{1-z-z^2} = \dfrac{A}{z_0 - z} + \dfrac{B}{z_1 - z}$ et en déduire une formule explicite pour F_n.

Exercice 44. Soit $z_k \to z_0$ une suite convergente.

(a) Pour tout polynôme $p(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$ on a $p(z_n) \to p(z_0)$.

(b) Soit $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série de puissance avec rayon de convergence $R > 0$. Si $|z_k| \leq r < R$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $S(z_k) \to S(z_0)$.

Indication: Ecrire $S(z) = p_N(z) + R_N(z)$ où p_N est un polynôme de degré N et le reste $R_N(z)$ satisfait $|R_N(z)| \leq C|z|^{N+1}$ pour tout $|z| \leq r$ et une certaine constante $C \geq 0$.