Département de Mathématiques
Université de Fribourg

Semestre d'automne 2016

Stefan Wenger, Theo Bühler

Analyse I

Série 1

à remettre jusqu'au lundi 3 octobre à 10:00 dans le casier entre les bureaux 2.55 et 2.56 du bâtiment de physique

---

Exercice 1. En utilisant les axiomes d'un corps ordonné et les conséquences déjà montrées dans le cours, montrer les propriétés suivantes:

(i) Si $x \in \mathbb{R}$ est tel que $-x < 0$ alors $x > 0$.

(ii) Si $x, y, u \in \mathbb{R}$ sont tels que $x < y$ et $u < 0$ alors $x \cdot u > y \cdot u$.

(iii) $1 > 0$ et $2 > 1$ et $3 > 1$.

Exercice 2. Montrer:

(i) Si $x > 0$ alors $\frac{1}{x} > 0$.

(ii) Si $0 < x < y$ alors $0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$.

(iii) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $-1 \cdot x = -x$.

(iv) Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ avec $x, y \geq 0$ on a $x < y$ si et seulement si $x^2 < y^2$.

Exercice 3. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer:

(i) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.

(ii) Si $x \neq 0$ alors $\left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{|x|}$.

(iii) Si $x < y$ alors $x < \frac{x+y}{2} < y$.

Exercice 4. Soient $\sigma_- \subset \mathbb{R}$ et $\sigma_+ \subset \mathbb{R}$ les sous-ensembles donnés par

$$\sigma_- := \{x \in \mathbb{R} : x < 0 \text{ ou } x^2 < 2\}$$

et

$$\sigma_+ := \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \text{ et } x^2 \geq 2\}.$$

Sans utiliser l'existence de $\sqrt{2}$, montrer que $\sigma := (\sigma_-, \sigma_+)$ est une coupure de Dedekind.

Exercice 5. Esquisser les sous-ensembles A de $\mathbb{R}$ donnés au-dessous et trouver, s'il existe, $\sup A$, $\inf A$, $\max A$, $\min A$:

(i) $A := \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$.

(ii) $A := \left\{(-1)^n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$.

(iii) $A := \left\{\frac{n}{n-3} \cdot (1 - \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}, n \geq 5\right\}$.