Département de Mathématiques
Université de Fribourg

Semestre d'automne 2016

Stefan Wenger, Theo Bühler

Analyse I

Série 0

à faire pendant la séance d'exercices du 21 septembre 2016

Exercice 1. Rappellez les axiomes d'un corps donnés dans le cours : les axiomes de l'addition (A1), ..., (A4), les axiomes de la multiplication (M1), ..., (M4), l'axiome de la distributivité (D), et l'axiome de la non-trivialité (N). Lesquels de ces axiomes sont satisfaits par les structures suivantes (on utilise l'addition et la multiplication habituelle)?

(i) L'ensemble $\{0\}$.

(ii) Les nombres naturels $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$.

(iii) Les nombres entiers $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$.

(iv) Les nombres rationnels $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$.

Exercice 2. En utilisant les axiomes algébriques de $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ et les conséquences déjà montrées dans le cours, montrer les propriétés suivantes:

(i) Soient $x \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Si $c \cdot x = c$ alors $x = 1$.

(ii) Pour tout $a, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$ l'équation $a \cdot x = c$ possède une et une seule solution.

(iii) Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ on a que $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$.

Exercice 3. Exprimer les sommes suivantes à l'aide du symbole $\sum$:

(a) $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{8} + \frac{7}{16} + \cdots + \frac{61}{2147483648}$

(b) $2^5 - 3^7 + 4^9 - 5^{11} + \cdots - 31^{63}$

(c) $2a_1 - 3a_5 + 4a_9 - 5a_{13} + \cdots - 29a_{109} + 30a_{113}$

(d) $2 + 12 + 30 + 56 + 90 + 132 + \cdots + 3080$

Exercice 4. Exprimer les produits suivants à l'aide du symbole $\prod$:

(a) $3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot \ \dots \ \cdot 119$

(b) $a_2 \cdot a_4 \cdot a_4 \cdot a_8 \cdot a_8 \cdot a_8 \cdot a_{16} \cdot a_{16} \cdot a_{16} \cdot a_{16} \cdot a_{32} \cdot a_{32} \cdot a_{32} \cdot a_{32} \cdot a_{32}$

Exercice 5. Compléter:

(a) $\sum_{k=1}^{7} (-1)^k a_{2k+1} = -a_3 + ? + \cdots + ?$

(b) $\sum_{k=3}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=1}^{?} a_? b_?$

(c) $\sum_{k=1}^{n} a_{2k+9} = \sum_{k=?}^{?} a_{2k+3}$