

NOM : _____ Prénom : _____

Voie d'étude : _____

UNIVERSITÉ DE FRIBOURG
Faculté des sciences

Département de Mathématiques
5 Sept. 2017

ALGÈBRE LINÉAIRE PROPÉDEUTIQUE
Examen

Tous les documents sont autorisés ; les calculatrices scientifiques ne sont pas autorisées.

Vos réponses doivent être motivées ! Des points seront retirés pour des argumentations manquantes ou incomplètes.

Exercice 1. (9 points)

On définit trois sous-ensembles de \mathbb{R}^3 .

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x + 2y \\ y \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\} \quad F = \left\{ \begin{pmatrix} xy \\ x \\ y \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\} \quad G = \left\{ \begin{pmatrix} x + z \\ y + z \\ x - y \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

- (a) On considère les vecteurs suivants de \mathbb{R}^3 . A quels des ensembles E, F, G appartiennent-ils ? Répondre en complétant le tableau suivant. Si la réponse est affirmative, donner les valeurs de x, y, z qui génèrent ces vecteurs.

	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
$\in E$			
$\in F$			
$\in G$			

- (b) Parmi E, F, G , lequel n'est pas un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 ? Argumenter.
Indication : c'est possible d'utiliser le point précédent pour un contre-exemple.
- (c) Déterminer les dimensions des deux sous-espaces vectoriels. Donner des bases pour chaque. Argumenter rapidement.

Tournez la page !

Exercice 2. (19 points)

On a une culture composée de trois types de bactéries qu'on va noter A , B et C . Elles évoluent dans le temps de la manière suivante. Chaque jour, les bactéries de type A se multiplient par 5. De plus, chaque bactérie de type B donnent naissance à une bactérie de type A , sept de type B et une de type C (puis meure); chaque bactéries de type C donnent naissance à trois bactéries de type A , six de type B et huit de type C (puis meure). On note a_n , b_n et c_n le nombre de bactéries de type A , B et C , respectivement, après n jours d'évolution.

- (a) Ecrire des équations qui donnent a_{n+1} , b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n, c_n .
- (b) Notons $S_n = a_n + b_n + c_n$ le nombre total d'individus après n jours. En regardant le nombre de nouvelles bactéries crée par chaque type A , B ou C , montrer que $5S_n \leq S_{n+1} \leq 17S_n$.
- (c) On pose $\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_{n+1}}{S_n}$ le taux de croissance asymptotique. Que peut-on déduire sur μ ?
- (d) Posons $M = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & 6 \\ 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}$. Calculer le produit $M \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ pour un vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}$.
- (e) On pose $T_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$. Exprimer T_{n+1} en fonction de M et T_n .
- (f) Ecrire la condition $\det(\lambda I_3 - M) = 0$ sous forme polynomiale. Verifier que l'équation admet $\lambda = 5$ et $\lambda = 10$ comme solutions. Que sont ces deux valeurs pour M ?
- (g) Trouver un vecteur non-nul $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que $.$
- (h) Trouver des vecteurs $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ et $Z = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ z \end{pmatrix}$ tels que $MY = 5Y$ et $MZ = 5Z$. Plus précisément, trouver les valeurs de $y, z \in \mathbb{R}$.
- (i) Argumenter que X, Y, Z est une famille libre de \mathbb{R}^3 . Que sont ces vecteurs par rapport à M ?
- (j) Supposons qu'on commence à la minute 0 avec 2 bactéries de type A, 2 de type B et 1 de type C. Que veut dire cela pour T_0 ? Ecrire T_0 dans la base (X, Y, Z) .
- (k) Ecrire T_1 dans la base (X, Y, Z) (utiliser les conditions sur MX, MY et MZ).
- (l) Ecrire T_n dans la base (X, Y, Z) .
- (m) Que vaut S_n ? Calculer μ .