UNIVERSITÉ DE FRIBOURG
Faculté des sciences

Département de Mathématiques
12 Juin 2018

ALGÈBRE LINÉAIRE PROPÉDEUTIQUE
Examen

Tous les document sont autorisés ; les calculatrices scientifiques ne sont pas autorisées.
Motivez vos réponses ! Des points seront retirés pour des argumentations manquantes.

Exercice 1. (7 points)

(a) Parmi les trois applications suivantes, laquelle n'est pas linéaire ? Argumentez sa non-linéarité.

$$u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+z \\ 2y-z \\ x+2y \end{pmatrix} \qquad v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ 3x-2y \end{pmatrix} \qquad w : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ zy \\ x+1 \end{pmatrix}$$

Solution: *w n'est pas linéaire car* $w\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Vous pouvez aussi donner d'autres contre-exemples pour montrer que w n'est pas linéaire : qui contre-disent soit l'additivité, soit la multiplication par une constante.

(b) Calculer le Ker des deux applications linéaires. (Pas besoin d'argumenter en detail).

Solution: *Un calcul directe montre que* $u\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$ *si et seulement si* $z = -x$ *et* $2y = -x$. *Ainsi* $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$.

On voit directement que $v\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$ *si et seulement si* $z = 0$. *Ainsi* $\mathrm{Ker}(v) = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

(c) Déduire le rang des applications linéaires.

Solution: *Par le théorème du rang,* $\mathrm{rang}(u) + \dim \mathrm{Ker}(u) = \dim(\mathbb{R}^3) = 3$ *donc* $\mathrm{rang}(u) = 2$ *(*$\mathrm{Ker}(u)$ *vient d'être calculé et sa dimension est* 1*).*
De même $\mathrm{rang}(v) = 2$.

(d) Quelles des applications linéaires sont injectives ; quelles sont surjectives ? Argumenter.

Solution: *Vu que* $\mathrm{Ker}(u) \neq \{0\}$ *et* $\mathrm{rang}(u) < 3$, *u n'est ni injective, ni surjective.*
De même $\mathrm{Ker}(v) \neq \{0\}$, *donc v n'est pas injective.*
Par contre $\mathrm{rang}(v) = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$, *donc* $\mathrm{Im}(v) = \mathbb{R}^2$, *donc v est surjective.*

Exercice 2. (9 points)

(a) Calculer le déterminant de la matrice suivante (vous pouvez utiliser le pivot de Gauss, ou toute autre méthode).

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Solution: *On applique le pivot de Gauss :*

$$\det(M) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$
$$= -2\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \end{pmatrix} = -2\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = -12\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -12.$$

(b) Du fait que $\det(M) \neq 0$, que peut-on déduire sur M ?

Solution: *Que M est inversible.*

(c) Considérons le polynôme P de degré 3 définit par $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Que valent $P(-1)$, $P(0)$, $P(1)$ et $P(2)$?

Solution:
$P(-1) = -a + b - c + d$;
$P(0) = d$;
$P(1) = a + b + c + d$;
$P(2) = 8a + 4b + 2c + d$.

(d) Calculer le produit matriciel $M \cdot \begin{pmatrix} d \\ c \\ b \\ a \end{pmatrix}$ et l'exprimer en fonction de P.

Solution: $M \cdot \begin{pmatrix} d \\ c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ d - c + b - a \\ d + c + b + a \\ d + 2c + 4b + 8a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(0) \\ P(-1) \\ P(1) \\ P(2) \end{pmatrix}$

(e) Combien de polynômes P de degré au plus 3 existe-il avec

$$P(-1) = 4 \qquad P(0) = 1 \qquad P(1) = -2 \qquad P(2) = -5?$$

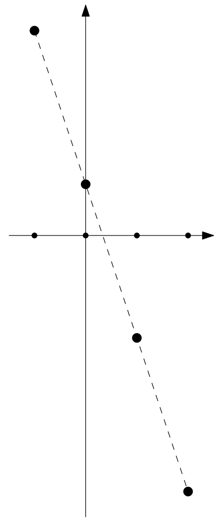
Solution: *La condition $P(-1) = 4$, $P(0) = 1$, $P(1) = -2$, $P(2) = -5$ est équivalente à demander que $M \cdot \begin{pmatrix} d \\ c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}$. Vu que M est inversible il existe un unique vecteur $\begin{pmatrix} d \\ c \\ b \\ a \end{pmatrix}$ qui satisfait cette équation, donc un unique tel polynôme.*

(f) Et tels que $P(-1) = 1732$, $P(0) = -0.03$, $P(1) = 218$ et $P(2) = -\sqrt{3}$?

Solution: *Par le même raisonnement qu'avant, il existe un unique tel polynôme.*

(g) Placer les points $(-1,4),(0,1),(1,-2)$ et $(2,-5)$ dans un plan. Trouver un polynôme P tel que

$$P(-1)=4, \quad P(0)=1, \quad P(1)=-2 \quad \text{et} \quad P(2)=-5.$$



Solution: *On observe que les points sont sur une ligne de pente* -3*. Ainsi le polynôme* P *est de degré* 1 *; il s'agit de* $P(x)=-3x+1$.

Exercice 3. (5 points)

(a) Quelles des familles suivantes de vecteurs sont liées ? Argumenter rapidement !

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}; \qquad \mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}; \qquad \mathcal{G} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \right\}.$$

Indication : pour la famille $\mathcal{G}$, regarder l'exercice précédent.

Solution: $\mathcal{E}$ *est libre ; on voit immédiatement que* $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \notin \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$\mathcal{F}$ *est liée : c'est une famille de* 4 *vecteurs dans un espace de dimension* 3.

$\mathcal{G}$ *est libre : les vecteurs de* $\mathcal{G}$ *sont les lignes de la matrice* M *de l'exercice* 2 *; cette matrice est inversible, donc la famille de ses lignes est libre.*

(b) Trouver pour chaque famille une base de l'espace engendré. Déduire le rang de chaque famille.

Solution: *Pour chaque point, il s'agit de trouver une famille libre et génératrice* **pour l'espace engendrée par les vecteurs en question**. *Il est donc naturel d'extraire de chaque famille* $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ *et* $\mathcal{G}$ *les vecteurs qui sont combinaisons linéaire des précédents.*

Les familles $\mathcal{E}$ *et* $\mathcal{G}$ *sont libres, donc des bases pour les espaces qu'elles engendrent. Ainsi leur rang est égal aux nombre de vecteur, à savoir* $\mathrm{rang}(\mathcal{E}) = 2$ *et* $\mathrm{rang}(\mathcal{G}) = 4$.

La famille $\mathcal{F}$ *n'est pas libre. En effet, on a*

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \textit{et} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On déduit que $\mathrm{Vect}(\mathcal{F}) = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$. *Les vecteurs* $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ *forment une famille libre (on voit qu'ils ne sont pas colinéaires) donc ces deux vecteurs forment une base de* $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$. *En fin, on déduit que* $\mathrm{rang}(\mathcal{F}) = 2$.