THÉORIE DE LA MESURE ET INTÉGRATION
EXERCICES – semaine 8 et 9

Les devoirs (optionnels) sont à rendre avant le vendredi 17 novembre 13h. Le responsable est **Basil Reinhard** *(email basil.reinhard@unifr.ch).*

Indiquez vos opinions de chaque exercice par mail à `ioan.manolescu@unifr.ch` *avec le sujet "Exercices théorie de la mesure" avant le 13 novembre en utilisant les indicateurs:*

1 - connu déjà (et bien compris); 2 - simple à faire/ simple à retrouver si déjà vu;
3 - abordable (je crois savoir faire); 4 - difficulté moyenne (je ne suis pas sur de ma solution);
5 - difficile (je ne sais pas comment commencer); 6 - je ne comprend même pas la question.

Exercice 1 (Important!)**.**
Soient (E, d) un espace métrique et $A \subset E$ un ensemble dense dans E. Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue (c.-à-d. telle que, pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x, y \in E$ avec $d(x, y) < \delta$, on a $|f(x) - f(y)| < \epsilon$).
Montrer qu'il existe une unique fonction $F : E \to \mathbb{R}$ continue telle que $F(x) = f(x)$ pour tout $x \in A$. Montrer que F est uniformément continue.
Même question si f est à valeurs dans un espace métrique complet.
Donner un contre-exemple si on suppose $f : A \to \mathbb{R}$ seulement continue, pas uniformément continue.

Exercice 2 (Théorème de point fixe de Banach)**.**
Soit (E, d) un espace métrique complet et $f : E \to E$ une application contractante, c.-à-d. telle qu'il existe $c \in [0, 1)$ avec $d(f(x), f(y)) \leq c\, d(x, y)$ pour tous $x, y \in E$. Montrer que f admet un unique point fixe (un point fixe est un $x \in E$ tel que $f(x) = x$).
Indication: pour l'existence, prendre un point $x_0 \in E$ et étudier la suite définie par $x_{n+1} = f(x_n)$. Montrer qu'elle converge vers un point de E. Quelle est sa vitesse de convergence?

Exercice 3.
Soit (E, d) un espace métrique. Montrer que si E est compact, alors il est complet et borné (c.-à-d. il existe $M > 0$ tel que $d(x, y) < M$ pour tout $x, y \in E$).
Indication: Pour montrer que E est borné, utiliser la contraposée: si on suppose que E n'est pas borné, construire une suite qui ne contient pas de sous-suite convergente.
Déduire que si $A \subset E$ est compact, alors A est fermé et borné. Est-ce que l'inverse est vrai?

Exercice 4.
Soit (E, d) un espace métrique et $K \subset E$ un compact.

- Montrer que si $f : K \to \mathbb{R}$ est continue, alors $f(K)$ est borné et f atteint sont sup et son inf:

$$\exists x, y \in K \text{ t.q.} \quad f(x) = \sup_{z \in K} f(z) \quad \text{et} \quad f(y) = \inf_{z \in K} f(z).$$

- Montrer que pour tout $x \in E$, il existe $y \in K$ tel que

$$d(x, y) = \inf_{z \in K} d(x, z) =: \text{dist}(x, K).$$

- Montrer que si $f : K \to \mathbb{R}$ est continue, alors f est uniformément continue.

Exercice 5 (Important!).
Soient E un espace de Banach et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E avec $\sum_{n\geq 1} \|x_n\| < \infty$. Montrer alors que $\sum_{n=1}^{N} x_n$ converge quand $N \to \infty$ vers un élément de E qu'on va noter $\sum_{n\geq 1} x_n$.
En autre mots, dans un espace de Banach, les sommes absolument convergentes convergent.
Monter que pour $N \geq 1$,

$$\sum_{n\geq 1} x_n - \sum_{n=1}^{N} x_n = \sum_{n>N} x_n$$

et que $\| \sum_{n>N} x_n \| \leq \sum_{n>N} \|x_n\|$.

Exercice 6.
Soit E un espace vectoriel. On dit que deux normes $\|.\|$ et $|||.|||$ sur E sont équivalentes s'il existe des constantes $0 < c < C$ telles que

$$c\|x\| \leq |||x||| \leq C\|x\|, \qquad \forall x \in E.$$

(a) Montrer que deux normes sont équivalentes si et seulement si elles génèrent la même topologie sur E.

(b) Montrer que si deux normes sont équivalentes, alors une suite de Cauchy dans une norme est aussi de Cauchy pour l'autre. Déduire que l'espace est complet dans une norme si et seulement si il est complet dans une autre.

(c) Montrer que si E est de dimension finie, alors toutes les normes sur E sont équivalentes.

(d) On écrit $\ell_b(\mathbb{R})$ pour l'ensemble des suites réelles bornées. Donner deux normes sur $\ell_b(\mathbb{R})$ qui ne soit pas équivalentes.

Exercice 7.
Montrer que tout espace vectoriel normé de dimension finie E est complet.
Indication: Fixer une base de E et utiliser une norme explicite (p.ex. la norme $\|.\|_\infty$). La preuve se base sur la complétude de $\mathbb{R}$; procéder coordonnée par coordonnée.

Exercice 8.
Soit $\mathcal{B}(0, 1)$ la boule unité d'un espace vectoriel normé E. Montrer que $\mathcal{B}(0, 1)$ est précompacte si et seulement si E est de dimension finie.

Exercice 9.
On écrit $\ell_0(\mathbb{R})$ pour l'ensemble des suites réelles avec un nombre fini de termes non-nuls et $\ell_{\text{cv}}(\mathbb{R})$ pour l'ensemble des suites réelles qui convergent vers 0.

(a) Montrer que $\ell_0(\mathbb{R})$ est un sous espace vectoriel de $\ell_{\text{cv}}(\mathbb{R})$.

(b) Montrer que $\|(x_n)\|_\infty = \sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\}$ est une norme sur $\ell_{\mathrm{cv}}(\mathbb{R})$.

(c) Montrer que $\ell_0(\mathbb{R})$ est dense dans $\ell_{\mathrm{cv}}(\mathbb{R})$ pour la norme $\|.\|_\infty$.

☠ Montrer que $\ell_{\mathrm{cv}}(\mathbb{R})$ est complet pour $\|.\|_\infty$.

Exercice 10.
Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de dimension finie. Montrer que F est fermé dans E.

Exercice 11.
Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie. Montrer que toutes les formes linéaires sont continues.

Exercice 12.
On écrit $\ell_0(\mathbb{R})$ pour l'ensemble des suites réelles avec un nombre fini de termes non-nuls. Exhiber une norme sur sur $\ell_0(\mathbb{R})$ et donner une forme linéaire continue et une discontinue pour cette norme.

Exercice 13. (a) Montrer que tout espace vectoriel normé de dimension finie est réflexif.

(b) Montrer qu'un espace vectoriel normé réflexif est nécessairement complet.

Exercice 14.
Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé.

(a) Montrer que la boule unité $\mathcal{B}(0,1) = \{x \in E : \|x\| < 1\}$ est un ensemble convexe, c.-à-d. qu'il est tel que, pour tous $x, y \in \mathcal{B}(0,1)$ et $\lambda \in [0,1]$, $\lambda x + (1-\lambda)y \in \mathcal{B}(0,1)$.

(b) Montrer que pour tous $x, y \in E$ avec $\|x\| = 1$ et $y \notin \mathbb{R}x$, il existe un $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que la droite $x + \mathbb{R}(\lambda y + x)$ n'intersect pas $\mathcal{B}(0,1)$.

(c) Representer le point précédent pour $E = \mathbb{R}^2$ et la norme euclidienne (donnée par $\|(x_1,x_2)\|_\infty = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$) puis séparément pour la norme sup (donnée par $\|(x_1,x_2)\|_\infty = \max\{|x_1|,|x_2|\}$).

(d) ~~Supposons que E contient une base algèbrique, c.-à-d. une famille $\mathcal{E} = (e_i)_{i\in I}$ telle que tout vecteur de E s'ecrit de manière unique comme combinaison linéaire *finie* de $\mathcal{E}$. Montrer alors qu'il existe un hyperplan H tel que $(x+H) \cap \mathcal{B}(0,1) = \emptyset$.~~
Ce dernier point est un peu trop compliqué.

Exercice 15.
Soit E un espace de Hilbert et $A \in E$. Que vaut $(A^\perp)^\perp$?

Exercice 16.
Soit $\ell^2 = \{(x_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{n\geq 0} x_n^2 < \infty\}$.

(a) Pour $(x_n), (y_n) \in \ell^2$, montrer que $\sum_{n\geq 0} |x_n y_n| \leq \sqrt{\sum_{n\geq 0} x_n^2}\sqrt{\sum_{n\geq 0} y_n^2}$.

(b) Déduire qu'on peut définir $\langle (x_n), (y_n) \rangle = \sum_{n\geq 0} x_n y_n$ et que $\langle .,. \rangle$ est un produit scalaire sur ℓ^2.

(c) Montrer que ℓ_0 (l'ensemble des suites réelles avec un nombre fini de termes non-nuls) est un sous-espace dense de ℓ^2.