# THÉORIE DE LA MESURE ET INTÉGRATION
## EXERCICES – semaine 8

**Exercice 1.**

(a) Soit $E$ un ensemble et $\mu_n : \mathcal{P}(E) \to [0, +\infty]$ des mesures extérieures pour $n \geq 1$. Supposons que $(\mu_n)_{n\geq 1}$ est une suite croissante, c.-à-d. que, pour tout $A \subset E$, $\mu_1(A) \leq \mu_2(A) \leq \dots$. Posons $\nu(A) = \lim\limits_{n\to\infty}\uparrow \mu_n(A)$.

Montrer que $\nu$ est une mesure extérieure sur $E$.

(b) Supposons que $(E, \mathrm{dist})$ est un espace métrique et soit $d \geq 0$. Montrer que pour $n \geq 1$

$$\mu_n(A) := \tfrac{\alpha(d)}{2^d} \inf\Big\{ \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{diam}(B_k)^d : A \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k \text{ et } \mathrm{diam}(B_k) \leq \tfrac{1}{n} \Big\}, \quad \forall A \subset E$$

définit une mesure extérieure sur $E$ (ou $\alpha(d)$ est le volume de la boule unité de $\mathbb{R}^d$).

(c) Conclure que

$$\mathcal{H}^d(A) := \lim_{\epsilon\to 0} \inf\Big\{ \tfrac{\alpha(d)}{2^d} \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{diam}(B_k)^d : A \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k \text{ et } \mathrm{diam}(B_k) \leq \epsilon \Big\} \in [0, +\infty].$$

est une mesure extérieure sur $E$.

**Exercice 2.**
Montrer que la mesure $\mathcal{H}^0$ sur $\mathbb{R}^d$ est la mesure de comptage, quelque soit $d$.

**Exercice 3.**
Que vaut $\mathcal{H}^1$ dans $\mathbb{R}^1$ ?
Pour un borélien $A \subset \mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$, que vaut $\mathcal{H}^1(A)$ ?

**Exercice 4.**
Le but de cet exercice est de calculer la dimension de Hausdorff de l'ensemble de Cantor $C_\infty = \bigcap_{n\geq 0} C_n$.
*Rappel*: L'ensemble de Cantor est défini comme suit. Soit $C_0 = [0,1]$. On pose $C_1 = C_0 \setminus (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \subset C_0$. Puis $C_2 = C_0 \setminus \big((\frac{1}{9}, \frac{2}{9}) \cup (\frac{7}{9}, \frac{8}{9})\big)$ etc. Formellement $C_{n+1} = \frac{1}{3}C_n \cup \big(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}C_n\big)$. Enfin, on pose $C_\infty = \bigcap_n C_n$.

(a) En utilisant le auto-similarité de $C_\infty$, donner un argument heuristique pour montrer que $\dim_{\mathcal{H}}(C_\infty) = \frac{\log 2}{\log 3}$.

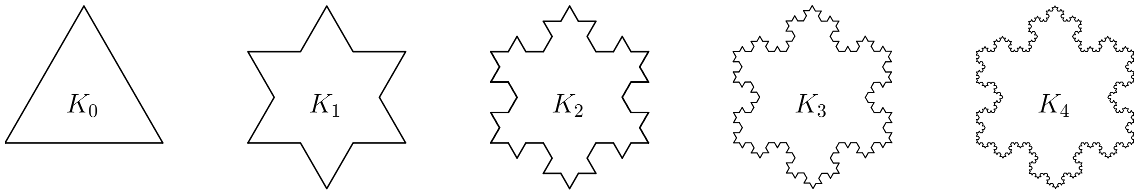
(b) Par un recouvrement explicite, montrer que $\mathcal{H}^{\frac{\log 2}{\log 3}}(C_\infty) \leq 1$.

(c) Soit $F$ la fonction de répartition associée à $C_\infty$. Monter que $\|F(x) - F(y)\| \leq \|x - y\|^{\frac{\log 2}{\log 3}}$ pour tout $x, y \in [0, 1]$.

*Indication:* montrer l'inégalité pour $F_n$ (la fonction de répartition associée à $C_n$) par récurrence sur $n$, ensuite passer à la limite.

(d) En déduire que $\dim_{\mathcal{H}}(C_\infty) \geq \frac{\log 2}{\log 3}$. Conclure.

**Exercice 5.**
Montrer que le contour du flocon de Koch $K_\infty = \bigcup_{n\geq 0} K_n$ est bien une courbe continue et qu'elle n'est pas rectifiable. Calculer sa dimension de Hausdorff.




Cinq étapes dans la construction du Flocon de Koch.

**Exercice 6.**
Le but de cet exercice est de construire un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ et une famille de variables aléatoires i.i.d. $(X_n)_{n\geq 1}$ uniformes dans $[0,1]$, ou plus généralement de v.a. indépendantes de lois arbitraires.

(i) Posons $\Omega = [0,1[$, $\mathcal{E} = \mathcal{B}([0,1[)$ et $\mathbb{P}$ la mesure de Lebesgue restreinte à $[0,1[$. Soit $U : \Omega \to \mathbb{R}$ définie par $U(t) = t$. Argumenter que $U$ est une v.a. uniforme sur $[0,1[$.

(ii) Écrivons $Y_1, Y_2, \dots$ pour les décimales de $U$ en base 2. Précisément

$$Y_{n+1} = \Big\lfloor 2^{n+1}\Big(U - \sum_{k=1}^{n} 2^{-k} Y_k\Big)\Big\rfloor.$$

Montrer que $Y_1, Y_2, \dots$ sont des v.a. i.i.d. de Bernoulli de paramètre $1/2$.

(iii) Poser, pour $n \geq 1$

$$X_n = \sum_{k\geq 1} Y_{2^n(2k+1)} 2^{-k}.$$

Montrer que $X_1, X_2, \dots$ sont variables aléatoires i.i.d. uniformes dans $[0,1]$.

(iv) Soit $\nu$ est une loi de probabilité sur $\mathbb{R}$ et écrivons $F$ pour sa fonction de répartition. Posons, pour $t \in (0,1)$ posons

$$F^{-1}(t) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq t\}.$$

Dessiner le graphe de $F$ et $F^{-1}$. Montrer que $F^{-1}(X_1)$ admet $F$ comme fonction de répartition. Conclure que $F^{-1}(X_1)$ a la loi $\nu$.

(v) Pour des lois de probabilité $\nu_1, \nu_2, \dots$, construire sur $\Omega$ des v.a. $Z_1, Z_2, \dots$ indépendantes et de lois $\nu_1, \nu_2, \dots$, respectivement.