THÉORIE DE LA MESURE ET INTÉGRATION
EXERCICES – semaine 8

Les devoirs (optionnels) sont à rendre dans la boitte aux lettres au bâtiment de physique marquée "Théorie de la mesure" le vendredi avant 13h. Le responsable est **Basil Reinhard** *(email basil.reinhard@unifr.ch).*

Exercice 1.
Soient $(E, \mathcal{E}, \mu)$ et $(F, \mathcal{F}, \nu)$ deux espaces mesurés σ-finies. Le but de cet exercice est de montrer l'unicité de la mesure produit.

(i) Montrer à l'aide du lemme de classe monotone que, si η et η' sont deux mesures finies sur $(E \times F, \mathcal{E} \otimes \mathcal{F})$ avec

$$\eta(A \times B) = \eta'(A \times B), \qquad \forall A \in \mathcal{E} \text{ et } B \in \mathcal{F},$$

alors $\eta = \eta'$. Conclure l'unicité de la mesure produit quand μ et ν sont finies.

(ii) Passons au cas ou μ et ν sont σ-finies. Ecrivons $E = \bigsqcup_{n\geq 0} E_n$ et $F = \bigsqcup_{n\geq 0} F_n$ avec $\mu(E_n) < \infty$ et $\nu(F_n) < \infty$ pour tout n (pourquoi peut-on faire ca?). Montrer par le point précédent que la restriction de $\mu \otimes \nu$ à $E_n \times F_m$ est unique pour tous $m, n \geq 0$.

(iii) Conclure.

Exercice 2.
Soient $(E, \mathcal{E}, \mu)$, $(F, \mathcal{F}, \nu)$, $(G, \mathcal{G}, \pi)$ trois espaces mesurés σ-finis. Montrer que

$$\mu \otimes (\nu \otimes \pi) = (\mu \otimes \nu) \otimes \pi$$

en argumentant que $[\mu \otimes (\nu \otimes \pi)](A \times B \times C) = [(\mu \otimes \nu) \otimes \pi](A \times B \times C)$ pour tous $A \in \mathcal{E}$, $B \in \mathcal{F}$ et $C \in \mathcal{G}$.

Exercice 3.
Ecrivons λ_d pour la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$. Montrer que

(i) λ_d est l'unique mesure sur $\mathbb{R}^d$ avec

$$\lambda_d([a_1, b_1[\times \cdots \times [a_d, b_d[) = \prod_{i=1^d} (b_d - a_d) \qquad \forall\ a_1, \ldots a_d \text{ et } b_1, \ldots, b_d.$$

Indication: utiliser les classes monotones.

(ii) Pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, $\lambda_d(\alpha A) = |\alpha|^d \lambda_d(A)$.
Indication: Montrer la relation pour les pavés. Conclure en montrant que $A \mapsto \lambda_d(\alpha A)$ et $A \mapsto |\alpha|^d \lambda_d(A)$ sont des mesures sur $\mathbb{R}^d$.

(iii) Les seules mesures sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ finies sur les compacts et invariantes par translations sont les multiples de λ_d.
Indication: procéder comme dans le cas uni-dimensionel.

(iv) λ_d est invariante par les isometries de $\mathbb{R}^d$.
Indication: montrer l'invariance par translations comme dans le cas uni-dimensionel. Pour une isométrie τ qui fixe 0, montrer que $A \mapsto \lambda_d(\tau(A))$ est une mesure sur $\mathbb{R}^d$, invariante par translations; conclure que c'est la mesure de Lebesgue en considerant la mesure de la boule unité.

Exercice 4.
Posons, pour $d \geq 1$ et $r \geq 0$, $\mathbb{B}_d(r) = \{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d : x_1^2 + \cdots + x_d^2 \leq r\}$. Let but est de calculer $\lambda_d(\mathbb{B}_d(r))$ ou λ_d est la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^d$.

(i) Argumenter que $\lambda_d(\mathbb{B}_d(r)) = r^d \lambda_d(\mathbb{B}_d(1))$. Posons $v_d = \lambda_d(\mathbb{B}_d(1))$.

(ii) En utilisant le théorème de Fubini, argumenter que

$$v_d = v_{d-1} \int_{-1}^{1} (1 - x^2)^{\frac{d-1}{2}} dx.$$

(iii) Posons $I_{d-1} = \int_{-1}^{1} (1 - x^2)^{\frac{d-1}{2}} dx$. En intégrant par parties, prouver que

$$I_{d-1} = (d-1)(I_{d-3} - I_{d-1}) \qquad \forall d \geq 3.$$

Trouver une equation de recurrence pour $I_{d-1} I_{d-2}$.

(iv) Calculer I_0 et I_1. Déduire la valeur de I_2.

(v) En utilisant les deux points précédents, montrer que $I_{d-1} I_{d-2} = \frac{2\pi}{d}$ pour tous $d \geq 2$.

(vi) En utilisant le point (a), montrer que $v_d = v_{d-2} I_{d-1} I_{d-2}$ et trouver une formule pour v_d en fonction de v_0 ou v_1, suivant la parité de d.

(vii) Calculer v_0 et v_1 directement. Déduire la valeur de v_d pour tous d.

Exercice 5.
Le but de cet exercice est de construire un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ et une famille de variables aléatoires i.i.d. $(X_n)_{n \geq 1}$ uniformes dans $[0, 1]$, ou plus généralement de v.a. indépendantes de lois arbitraires.

(i) Posons $\Omega = [0, 1[$, $\mathcal{E} = \mathcal{B}([0, 1[)$ et $\mathbb{P}$ la mesure de Lebesgue restreinte à $[0, 1[$. Soit $U : \Omega \to \mathbb{R}$ définie par $U(t) = t$. Argumenter que U est une v.a. uniforme sur $[0, 1[$.

(ii) Ecrivons $Y_1, Y_2, \dots$ pour les decimales de U en base 2. Précisement

$$Y_{n+1} = \Big\lfloor 2^{n+1} \Big(U - \sum_{k=1}^{n} 2^{-k} Y_k \Big) \Big\rfloor.$$

Montrer que $Y_1, Y_2, \dots$ sont des v.a. i.i.d. de Bernoulli de paramètre 1/2.

(iii) Poser, pour $n \geq 1$

$$X_n = \sum_{k \geq 1} X_{2^n(2k+1)} 2^{-k}.$$

Montrer que $X_1, X_2, \ldots$ sont variables aléatoires i.i.d. uniformes dans $[0,1]$.

(iv) Soit ν est une loi de probabilité sur $\mathbb{R}$ et écrivons F pour sa fonction de répartition. Posons, pour $t \in (0,1)$ posons

$$F^{-1}(t) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq t\}.$$

Dessiner le graphe de F et F^{-1}. Montrer que $F^{-1}(X_1)$ admet F comme fonction de répartition. Conclure que $F^{-1}(X_1)$ a la loi ν.

(v) Pour des lois de probabilité $\nu_1, \nu_2, \ldots,$ construire sur Ω des v.a. $Z_1, Z_2, \ldots$ indépendantes et de lois $\nu_1, \nu_2, \ldots,$ respectivement.