THÉORIE DE LA MESURE ET INTÉGRATION
EXERCICES – semaine 7

Exercice 1 (Construction des mesures finies sur $\mathbb{R}$)**.**
Le but de cet exercice est de construire les mesures finies sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ à partir de la mesure de Lebesgue λ.

(a) Supposons que F est une fonction de répartition continue. Montrer qu'il existe au plus un nombre dénombrable de points $x \in \mathbb{R}$ avec $|F^{-1}(x)| > 1$.

(b) Pour $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, posons $F(A) = \{F(x) : x \in A\}$. Montrer que $F(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
Indication: considerer $\mathcal{C} := \{A \subset \mathbb{R} : F(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$.

(c) Montrer que $\mu(A) = \lambda(F(A))$ définie une mesure finie sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et que sa fonction de répartition est F.

(d) En fin, si F est une fonction de répartition générale (pas forcement continue) utiliser la décomposition de l'exercice 1 de la série 6 pour construire une mesure sur $\mathbb{R}$ de fonction de répartition F.

(e) Que obtient-t-on si on applique le point (c) à la fonction de répartition F?

Exercice 2.
Soit $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace topologique mesuré (avec $\mathcal{B}(E) \subset \mathcal{E}$). Montrer que pour tout $A \in \mathcal{E}$,

$$\inf\{\mu(K) : K \subset A,\ K \text{ fermé}\} = \mu(\overline{A}) \text{ et}$$
$$\sup\{\mu(U) : A \subset U,\ U \text{ ouvert}\} = \mu(\mathring{A}).$$

Exercice 3.
Le but de cet exercice est de montrer directement que les mesures boréliennes sur $\mathbb{R}$ qui sont finies sur les compacts sont régulières.

(a) Montrer que tout ouvert $U \subset \mathbb{R}$ est une union dénombrable d'intervalles ouverts.

(b) Déduire que, par sa construction (Thm. 3.8), la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ est extérieurement régulière.

(c) Si $A \in \mathcal{B}$ est contenu dans $(-M, M)$, montrer la régularité intérieure pour A en utilisant celle extérieure pour $(-M, M) \setminus A$.

(d) Conclure que la mesure de Lebesgue est régulière.

(e) En utilisant la construction des mesures à partir de leur fonctions de répartitions, répliquer les points (a)-(d) pour montrer que toute mesure qui admet une fonction de répartition est régulière. Conclure que toutes les mesures finies sur les compacts sont régulières.

Exercice 4 (Lemme d'Urysohn)**.**
On veut montrer le résultat suivant.

Lemme:*Soient E un espace métrique localement compact et $K \subset E$ un compact. Alors*

(i) *pour tout ouvert U avec $K \subset U$, il existe une fonction $f \in \mathcal{C}_c(E)$ avec $\mathbf{1}_K \leq f \leq \mathbf{1}_U$.*

(ii) *il existe une suite de fonctions $f_n \in \mathcal{C}_c(E)$ avec $0 \leq f_n \leq 1$ pour tout n et*

$$f_n(x) \searrow \mathbf{1}_K(x), \quad \textit{quand } n \to \infty, \ \textit{pour tout } x \in E.$$

(a) Montrer que pour tout $A \subset E$, la fonction $x \mapsto \mathrm{dist}(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y)$ est continue. *Indication:* Montrer qu'elle est 1-Lipschitzienne.

(b) Montrer que $\mathrm{dist}(K, U^c) = \inf\{d(x, y) \,:\, x \in K, \, y \in U^c\} > 0$.

(c) Montrer l'existence de $\epsilon > 0$ tel que $K^{(\epsilon)} = \{x \in E \,:\, \mathrm{dist}(x, K) \leq \epsilon\}$ est compact.

(d) En utilisant la fonction $\mathrm{dist}(x, K)$, construire f continue avec $\mathbf{1}_K \leq f \leq \mathbf{1}_{K^{(\epsilon)}}$.

(e) Conclure

Exercice 5.
Le but de cet exercice est de s'habituer avec les différentes propriétés des espaces métriques. Ce qu'il faut retenir est qu'un espace métrique localement séparable est également complet et σ-compact. De plus, c'est essentiellement un espace propre (quitte à modifier la distance sans modifier la topologie).

(a) Montrer qu'un espace métrique localement compact est complet.

(b) Montrer qu'un espace métrique propre est localement compact, σ-compact, complet et séparable.

(c) Donner un exemple d'espace métrique qui est polonais (complet et separable) mais pas localement ou σ-compact.

(d) Donner un exemple d'espace métrique qui est localement compact mais pas σ-compact.

(e) Montrer qu'un espace métrique localement compact est σ-compact si et seulement si il est séparable.

(f) ☠ Soit (E, d) un espace métrique localement compact qui est σ-compact. Montrer qu'il existe un distance d' sur E qui génère la même topologie que d et telle que (E, d') est propre.

(g) Donner un exemple d'espace métrique qui est localement est σ-compact mais pas propre (*Indication:* modifier la distance euclidienne sur $\mathbb{R}$ pour que $B(0, 1) = \mathbb{R}$ mais sans modifier la topologie).

Exercice 6.
Soient $(E, \mathcal{E}, \mu)$ et $(F, \mathcal{F}, \nu)$ deux espaces mesurés σ-finies. Le but de cet exercice est de montrer l'unicité de la mesure produit.

(i) Montrer à l'aide du lemme de classe monotone que, si η et η' sont deux mesures finies sur $(E \times F, \mathcal{E} \otimes \mathcal{F})$ avec

$$\eta(A \times B) = \eta'(A \times B), \qquad \forall A \in \mathcal{E} \text{ et } B \in \mathcal{F},$$

alors $\eta = \eta'$. Conclure l'unicité de la mesure produit quand μ et ν sont finies.

(ii) Passons au cas où μ et ν sont σ-finies. Écrivons $E = \bigsqcup_{n \geq 0} E_n$ et $F = \bigsqcup_{n \geq 0} F_n$ avec $\mu(E_n) < \infty$ et $\nu(F_n) < \infty$ pour tout n (pourquoi peut-on faire ça ?). Montrer par le point précédent que la restriction de $\mu \otimes \nu$ à $E_n \times F_m$ est unique pour tous $m, n \geq 0$.

(iii) Conclure.

Exercice 7.
Soient $(E, \mathcal{E}, \mu)$, $(F, \mathcal{F}, \nu)$, $(G, \mathcal{G}, \pi)$ trois espaces mesurés σ-finis. Montrer que

$$\mu \otimes (\nu \otimes \pi) = (\mu \otimes \nu) \otimes \pi$$

en argumentant que $[\mu \otimes (\nu \otimes \pi)](A \times B \times C) = [(\mu \otimes \nu) \otimes \pi](A \times B \times C)$ pour tous $A \in \mathcal{E}$, $B \in \mathcal{F}$ et $C \in \mathcal{G}$.

Exercice 8.
Écrivons λ_d pour la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$. Montrer que

(i) λ_d est l'unique mesure sur $\mathbb{R}^d$ avec

$$\lambda_d([a_1, b_1[\times \cdots \times [a_d, b_d[) = \prod_{i=1^d} (b_d - a_d) \qquad \forall\ a_1, \ldots a_d \text{ et } b_1, \ldots, b_d.$$

Indication: utiliser les classes monotones.

(ii) Pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, $\lambda_d(\alpha A) = |\alpha|^d \lambda_d(A)$.
Indication: Montrer la relation pour les pavés. Conclure en montrant que $A \mapsto \lambda_d(\alpha A)$ et $A \mapsto |\alpha|^d \lambda_d(A)$ sont des mesures sur $\mathbb{R}^d$.

(iii) Les seules mesures sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ finies sur les compacts et invariantes par translations sont les multiples de λ_d.
Indication: procéder comme dans le cas uni-dimensionnel.

(iv) λ_d est invariante par les isométries de $\mathbb{R}^d$.
Indication: montrer l'invariance par translations comme dans le cas uni-dimensionnel. Pour une isométrie τ qui fixe 0, montrer que $A \mapsto \lambda_d(\tau(A))$ est une mesure sur $\mathbb{R}^d$, invariante par translations; conclure que c'est la mesure de Lebesgue en considérant la mesure de la boule unité.