UNIVERSITÉ DE FRIBOURG 23 oct. 2017

THÉORIE DE LA MESURE ET INTÉGRATION
EXERCICES – semaine 6

Les devoirs (optionnels) sont à rendre dans la boitte aux lettres au bâtiment de physique marquée "Théorie de la mesure" le vendredi avant 13h. Le responsable est **Basil Reinhard** *(email basil.reinhard@unifr.ch).*

Les exercices marqués par le symbole ☠ sont plus difficiles.

Exercice 1.
Soient E un ensemble et $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$ une algèbre de sous-ensembles de E:

- $\emptyset \in \mathcal{A}$;
- si $A \in \mathcal{A}$, alors $A^c \in \mathcal{A}$;
- si $A, B \in \mathcal{A}$, alors $A \cup B \in \mathcal{A}$.

Si en plus $\mathcal{A}$ est stable par union dénombrable *disjointe*, montrer que $\mathcal{A}$ est une tribu.

Exercice 2 (Théorème d'Egorov ☠)**.**
Soit $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré avec $\mu(E) < \infty$, et soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions mesurables, définies sur E, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Supposons que (f_n) converge presque partout vers une fonction $f : E \to \mathbb{R}$.
Montrer que alors (f_n) converge uniformément en-dehors d'un ensemble de mesure arbitrairement petite. Plus exactement, montrer que pour tout $\epsilon > 0$ il existe un ensemble mesurable $A \subset E$ tel que $\mu(A) < \epsilon$ et tel que

$$\sup_{x\in A^c} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Indications:

(a) Pour $\delta > 0$, considerer les ensembles $B_N^{(\delta)} = \{x \in E : \forall n \geq N \, |f_n(x) - f(x)| < \delta\}$. Que peut-on dire sur $\mu(B_N^{(\delta)})$ quand $N \to \infty$?

(b) Pour une suite croissante N_k, que peut-on dire de l'ensemble $\bigcap_{k\geq 1} \mu(B_N^{(1/k)})$, ou plus précisément de la convergence de f_n vers f sur cet ensemble?

(c) Si on choisie la suite N_k de manière intelligente, peut-on s'assurer que $\left[\bigcap_{k\geq 1} \mu(B_N^{(1/k)})\right]^c$ est de probabilité arbitrairement petite?

Exercice 3.
Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ avec $\lambda(A^c) = 0$. Montrer que A est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 4.
Le but de cet exercice est d'exhiber un ensemble non-dénombrable de mesure de Lebesgue nulle.

Soit $C_0 = [0,1]$. On pose $C_1 = C_0 \setminus (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \subset C_0$. Puis $C_2 = C_0 \setminus \big((\frac{1}{9}, \frac{2}{9}) \cup (\frac{7}{9}, \frac{8}{9})\big)$ etc. Formellement $C_{n+1} = \frac{1}{3}C_n \cup \big(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}C_n\big)$. En fin, on pose $C_\infty = \cap_n C_n$.

Monter que C_∞ a mesure de Lebesgue nulle mais qu'il n'est pas dénombrable.

Exercice 5.
Soit μ une mesure finie sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ de fonction de répartition F_μ. Supposons que $F_\mu \in \mathcal{C}^1$. Montrer que μ admet la densité F'_μ par rapport à la mesure de Lebesgue λ.
Indication: Poser $\nu = F'_\mu \, d\lambda$ et montrer que $\nu = \mu$. Pour ce dernier point, utiliser le critère d'unicité des mesures basé sur les classes monotones.

Exercice 6 (☠).
Le but de cet exercice est de construire la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ à l'aide du Théorème 3.3.

(a) Utiliser l'algèbre $\mathcal{A}$ engendrée par les intervalles. Il s'agit de l'ensemble des unions finies disjointes d'intervalles. Définir ρ pour $\mathcal{A}$.

(b) Pour montrer que ρ est σ-additive sur $\mathcal{A}$, montrer qu'il suffit de montrer que, pour tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et $I_1, I_2, \dots \subset \mathbb{R}$ deux à deux disjoints, tels que

$$I = \bigsqcup_n I_n,$$

on a $\rho(I) = \sum_{n \geq 1} \rho(I_n)$.

(c) Observer que $\rho(I) \geq \sum_{n=1}^N \rho(I_n)$ pour tout $N \geq 1$. Déduire que $\rho(I) \geq \sum_{n \geq 1} \rho(I_n)$.

(d) Pour l'inégalité inverse, commencer par montrer le résultat suivant:
Si $J = [a,b]$ est un segment de $\mathbb{R}$ et $J_1, \dots, J_N$ sont des intervalles ouvertes de $\mathbb{R}$ avec $J \subset \bigcup_{n=1}^N J_n$, alors $\rho(J) \leq \sum_{n=1}^N \rho(I_n)$.

(e) Généraliser cela à
Si $J = [a,b]$ est un segment de $\mathbb{R}$ et $J_1, J_2 \dots$ sont des intervalles ouvertes de $\mathbb{R}$ avec $J \subset \bigcup_{n=1}^\infty J_n$, alors $\rho(J) \leq \sum_{n=1}^\infty \rho(I_n)$.
Indication: Utiliser la compacité de J.

(f) Généraliser le point précédent aux intervalles J et $J_1, J_2 \dots$ pas forcement ouverts.
Indication: Utiliser des approximations par des intervalles ouverts.

(g) Conclure.