THÉORIE DE LA MESURE ET INTÉGRATION
EXERCICES – semaine 6

Exercice 1.
Soit $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction croissante avec $\lim_{x\to-\infty}F(x)=0$ et $\lim_{x\to+\infty}F(x)<\infty$.

(a) Montrer que F admet un nombre au plus dénombrable de sauts. Notons S leur ensemble.

(b) Montrer qu'on peut modifier F pour la rendre continue à droite, sans changer ses limites à gauche/droite, en posant $\tilde{F}(x)=\lim_{y\searrow x}F(y)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$. Désormais on va considérer que F est continue à droite.

(c) Soit $m(x)=\lim_{y\searrow x}F(y)-\lim_{y\nearrow x}F(y)$ le saut au point x. Posons $G(x)=\sum_{y\leq x}m(y)$. Montrer que $G(x)\leq F(x)$ pour tout x.

(d) Montrer que $F-G$ est une fonction continue croissante.

(e) Notons μ la mesure de fonction de répartition F, et $\tilde{\mu}$ celle de fonction de répartition $F-G$. Notons
$$\mathrm{m}=\sum_{x\in S}m(x)\delta_x,$$
où δ_x est la mesure de Dirac en x. Montrer que $\mu=\tilde{\mu}+\mathrm{m}$.

Exercice 2.
L'ensemble de Cantor $C_\infty\subset[0,1]$ est défini comme suit. Soit $C_0=[0,1]$. On pose $C_1=C_0\setminus(\frac{1}{3},\frac{2}{3})\subset C_0$. Puis $C_2=C_0\setminus\big((\frac{1}{9},\frac{2}{9})\cup(\frac{7}{9},\frac{8}{9})\big)$ etc. Formellement $C_{n+1}=\frac{1}{3}C_n\cup\big(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}C_n\big)$. Enfin, on pose $C_\infty=\bigcap_{n\geq 0}C_n$.

(a) Calculer $\lambda(C_n)$ et déduire que $\lambda(C_\infty)=0$.

(b) Soit F_n la fonction de répartition de $\left(\frac{3}{2}\right)^n\lambda(.\cap C_n)$ où $\lambda(.\cap C_n)$ est la mesure de Lebesgue restreinte à C_n (c.-à-d. la mesure donnée par $A\mapsto\lambda(A\cap C_n)$). Dessiner sur un même graph, $F_0,F_1,\ldots$.

(c) Montrer que $(F_n)_{n\geq 0}$ converge quand $n\to\infty$ vers une fonction croissante F (est-ce que la convergence est simple/en norme infinie $\|.\|_\infty$?)

(d) Montrer que F est croissante et continue.

(e) Soit μ la mesure de fonction de répartition F. Montrer que $\mu(C_\infty)=[0,1]=1$ mais que μ n'as pas d'atomes (c.-à-d. que $\mu(\{x\})=0$ pour tout $x\in[0,1]$) .

(f) Est-ce qu'il existe une fonction f mesurable positive telle que $\mu=fd\lambda$?

La mesure μ est concentrée sur un ensemble de mesure de Lebesgue 0, mais n'a pas d'atomes. Cet exemple nous montre qu'une mesure ne se décompose pas uniquement dans une partie absolument continue et une partie atomique (à retenir pour plus tard).

Exercice 3.
Soit $F : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ une fonction

- croissante,
- continue à droite et admettant des limites à gauche en tout point,
- avec $\lim_{t\to-\infty} F(t) = 0$ et $\lim_{t\to\infty} F(t)$ est finie.

Le but est de montrer qu'il existe une unique mesure μ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ de fonction de répartition F.

(a) Montrer pour commencer l'unicité: si μ et ν sont deux mesures finies sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ avec $F_\mu = F_\nu$ alors $\mu = \nu$.

(b) Existence:

- Si on suppose que μ existe, comment exprimer $\mu(]a, b[)$ en utilisant F ?
- Refaire la preuve de la construction de la mesure de Lebesgue en utilisant la mesure extérieure

$$\mu^*(A) = \inf\Big\{ \sum_{n\in\mathbb{N}} [\lim_{y\nearrow b_n} F(y) - F(a_n)] \, : \, A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}}]a_n, b_n[\Big\}.$$

Exercice 4.
Soient (E, d) un espace métrique et $A \subset E$. Posons

$$B_n = \{x \in E : \operatorname{dist}(x, A^c) \geq 1/n\} \qquad \text{pour } n \geq 1.$$

Montrer que les ensembles $(B_n)_{n\geq1}$ foment une suite croissante de fermés. Que vaut $\Uparrow\!\!\bigcup_n B_n$ en terms de A?

Exercice 5.
Soit E un espace topologique. Montrer que toute fonction $f \in \mathcal{C}_c$ est bornée.
Indication: vous pouvez vous limiter au cas ou E est métrique et utiliser la compacité séquentielle.