


THÉORIE DE LA MESURE ET INTÉGRATION
EXERCICES – semaine 5

Les exercices marqués par le symbole  sont plus difficiles.

Exercice 1.

Soient E un ensemble et $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$ une algèbre de sous-ensembles de E :

- $\emptyset \in \mathcal{A}$;
- si $A \in \mathcal{A}$, alors $A^c \in \mathcal{A}$;
- si $A, B \in \mathcal{A}$, alors $A \cup B \in \mathcal{A}$.

Si en plus \mathcal{A} est stable par union dénombrable *disjointe*, montrer que \mathcal{A} est une tribu.

Exercice 2.

Soient E un espace métrique et $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$ une collection de sous-ensembles avec $\emptyset \in \mathcal{A}$. De plus, soit $\rho : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$ une fonction avec $\rho(\emptyset) = 0$. Pour $\delta > 0$ et $A \subset E$, posons

$$\mu_\delta(A) = \inf \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} \rho(A_n) : A_0, A_1, \dots \in \mathcal{A}, A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \text{ et } \text{diam}(A_n) < \delta, \forall n \geq 0 \right\}.$$

On rappelle que, par convention, $\inf \emptyset = \infty$. De plus, posons $\mu_0(A) = \lim_{\delta \searrow 0} \mu_\delta(A)$.

Montrer que μ_0 est une mesure extérieure sur E et que $\mathcal{B}(E) \subset \mathcal{M}(\mu_0)$.

Exercice 3 (Théorème d'Egorov .

Soit (E, \mathcal{E}, μ) un espace mesuré avec $\mu(E) < \infty$, et soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonctions mesurables, définies sur E , à valeurs dans \mathbb{R} . Supposons que (f_n) converge presque partout vers une fonction $f : E \rightarrow \mathbb{R}$.

Montrer que alors (f_n) converge uniformément en-dehors d'un ensemble de mesure arbitrairement petite. Plus exactement, montrer que pour tout $\epsilon > 0$ il existe un ensemble mesurable $A \subset E$ tel que $\mu(A) < \epsilon$ et tel que

$$\sup_{x \in A^c} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Indications:

- (a) Pour $\delta > 0$, considérer les ensembles $B_N^{(\delta)} = \{x \in E : \forall n \geq N |f_n(x) - f(x)| < \delta\}$. Que peut-on dire sur $\mu(B_N^{(\delta)})$ quand $N \rightarrow \infty$?
- (b) Pour une suite croissante N_k , que peut-on dire de l'ensemble $\bigcap_{k \geq 1} \mu(B_{N_k}^{(1/k)})$, ou plus précisément de la convergence de f_n vers f sur cet ensemble ?
- (c) Si on choisie la suite N_k de manière intelligente, peut-on s'assurer que $[\bigcap_{k \geq 1} \mu(B_{N_k}^{(1/k)})]^c$ est de probabilité arbitrairement petite ?

Exercice 4.

Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ avec $\lambda(A^c) = 0$. Montrer que A est dense dans \mathbb{R} .

Exercice 5.

Le but de cet exercice est d'exhiber un ensemble non-dénombrable de mesure de Lebesgue nulle.

Soit $C_0 = [0, 1]$. On pose $C_1 = C_0 \setminus (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \subset C_0$. Puis $C_2 = C_0 \setminus ((\frac{1}{9}, \frac{2}{9}) \cup (\frac{7}{9}, \frac{8}{9}))$ etc. Formellement $C_{n+1} = \frac{1}{3}C_n \cup (\frac{2}{3} + \frac{1}{3}C_n)$. Enfin, on pose $C_\infty = \bigcap_n C_n$.

Montrer que C_∞ a mesure de Lebesgue nulle mais qu'il n'est pas dénombrable.

Exercice 6.

Soit μ une mesure finie sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ de fonction de répartition F_μ . Supposons que $F_\mu \in \mathcal{C}^1$. Montrer que μ admet la densité F'_μ par rapport à la mesure de Lebesgue λ .

Indication: Poser $\nu = F'_\mu d\lambda$ et montrer que $\nu = \mu$. Pour ce dernier point, utiliser le critère d'unicité des mesures basé sur les classes monotones.