THÉORIE DE LA MESURE ET INTÉGRATION
EXERCICES – semaine 4

Les devoirs (optionnels) sont à rendre dans la boitte aux lettres au bâtiment de physique marquée "Théorie de la mesure" le vendredi avant 13h. Le responsable est **Basil Reinhard** *(email basil.reinhard@unifr.ch).*

Exercice 1.
Soit $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré. Montrer que pour $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{E}$,

$$\mu\Big(\bigcup_{n\geq 1} A_n\Big) \leq \sum_{n\geq 1} \mu(A_n).$$

Exercice 2.
Soit $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré. Montrer que pour $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{E}$ de mesures finies,

$$\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) = \sum_{\substack{I\subset\{1,\dots,n\}\\ I\neq\emptyset}} (-1)^{|I|+1} \mu\Big(\bigcap_{k\in I} A_k\Big).$$

Indication: procéder par recurrence.

Exercice 3.
Observons que $\mathbb{R}^2$ a une topologie canonique et donc une tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. D'autre part $\mathbb{R}^2$ est le produit $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, et donc a une tribu produit. Montrer que

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma\big\{[a, b] \times [c, d] : \ a < b \text{ et } c < d\big\}.$$

Généraliser cela à $\mathbb{R}^d$.

Exercice 4.
Considérons l'espace topologique $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ muni de la topologie engendrée par les ouverts de $\mathbb{R}$ ainsi que les ensembles de la forme $[-\infty, a)$ et $(a, +\infty]$ pour $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $A \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ si et seulement si $A \setminus \{\pm\infty\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Exercice 5.
Soient $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable, μ, ν deux mesures sur E et $\mathcal{A}$ une collection d'ensembles stable par intersections finies. Supposons que $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{E}$ et que, pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) = \nu(A)$.

(a) Si $\mu(E) < \infty$ et $E \in \mathcal{A}$, montrer que $\mu = \nu$.

(b) Supposons qu'il existe une suite $A_0 \subset A_1 \subset \dots$ dans $\mathcal{A}$ avec $\mu(A_k) < \infty$ pour tout $k \geq 0$ et telle que $E = \bigcup_{k\geq 0} A_k$. Montrer que $\mu = \nu$.

(c) Montrer par un contre-exemple que, sans les conditions de finitude (ou σ-finitude) d'avant, on peut avoir $\mu \neq \nu$.

Exercice 6.
Admettant l'existence d'une mesure λ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ telle que $\lambda([a,b]) = b - a$ pour tout $a < b$, montrer que si $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ est tel que $\lambda(A) = 0$, alors A^c est dense dans $\mathbb{R}$.
Rappel: Un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ est dit dense si pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $\epsilon > 0$, $]x - \epsilon, x + \epsilon[$ contient au moins un point de E.

Exercice 7.
Soient $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable et $f_n : E \to \mathbb{R}$ des fonctions mesurables pour $n \geq 1$. Montrer que

- $\limsup_n f_n$ et $\liminf_n f_n$ sont des fonctions mesurables de E dans $\overline{\mathbb{R}}$;
- $\{x \in E : \lim_n f_n(x) \text{ existe}\} \in \mathcal{E}$.

Exercice 8.
Montrer que toute fonction continue par morceaux $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est mesurable.

Exercice 9.
Soit $f : E \to F$ une fonction et $\mathcal{E}$ une tribu sur E. Expliquer pourquoi $\{f(B) : B \in \mathcal{E}\}$ n'est pas forcement une tribu sur F. Donner un contre-exemple.

Exercice 10.
Soient $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction telle qu'il existe une suite de fonctions étagées convergeant ponctuellement vers f. Montrer que f est mesurable.

Exercice 11.
Soient $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré. Montrer qu'il existe en général des fonctions $f : E \to [0, \infty]$ avec $\int f \, d\mu = \infty$ mais $f < \infty$ presque partout. Est-ce possible même si on suppose $\mu(E) < \infty$?