THÉORIE DE LA MESURE ET INTÉGRATION
EXERCICES – semaine 4

On fixe $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré. Toutes les fonctions ci-dessous sont de E dans $\mathbb{R}$.

Exercice 1.
Montrer qu'il existe en général des fonctions $f : E \to [0, \infty]$ avec $\int f \, d\mu = \infty$ mais $f < \infty$ presque partout. Est-ce possible même si on suppose $\mu(E) < \infty$?

Exercice 2.
A l'aide du théorème de convergence monotone énoncé dans le cours, démontrer la généralisation suivante. Soient $(f_n)_{n\geq 1}$ et f des fonctions intégrables à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que pour μ-presque tout x, $f_n \nearrow f(x)$. Alors $\int f_n d\mu \to \int f d\mu$.

Exercice 3.
Soient f et g deux fonctions mesurables à valeurs dans $[0, \infty]$. Montrer que $\int fg d\mu = \int f d(g\mu)$.

Exercice 4.
On se place sur l'espace $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Soit ϕ une fonction continue à valeurs dans $[0, \infty)$, à support dans $[-1, 1]$ (c.-à-d. $\phi(x) = 0$ si $x \notin [-1, 1]$), avec $\int \phi d\lambda = 1$. Pour $n \geq 1$, posons

$$f_n(x) = n\phi(nx), \quad g_n(x) = \tfrac{1}{n}\phi\left(\tfrac{1}{n}x\right), \quad h_n(x) = \phi(x - n), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Montrer que $f_n(x), g_n(x), h_n(x) \to 0$ quand $n \to \infty$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$.
Calculer $\int f_n d\lambda$, $\int g_n d\lambda$, $\int h_n d\lambda$. Commenter...
Dessiner les graphes de ces fonctions.

Exercice 5.
Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ la suite de fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par, pour $n \geq 1$, $f_n = \frac{1}{n}\mathbf{1}_{[n,n+1)}$. Montrer que tout chaque f_n est mesurable et que $\int f_n d\lambda \to 0$.
Montrer que la convergence n'est pas dominée par une fonction intégrable.
Montrer que tout sous-suite $(f_{\sigma(n)})_{n\geq 1}$ de $(f_n)_{n\geq 1}$ contient une sous-sous-suite $(f_{\tau(\sigma(n))})_{n\geq 1}$ qui est dominée par une fonction intégrable.
Montrer que plus généralement, cette dernière propriété suffit pour déduire la convergence des intégrales.

Exercice 6.
Soient $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré et $f : E \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que

(i) pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est mesurable,

(ii) pour μ-presque tout $x \in E$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue,

(iii) il existe une fonction $g \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{E}, \mu)$ telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$|f(x, t)| \leq g(x) \qquad \text{pour } \mu\text{-presque tout } x \in E.$$

Montrer que la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par $F(t) = \int f(x,t)d\mu(x)$ est bien définie et continue.

Exercice 7.
Soient $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré et $f : E \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que

(i) pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est dans $\mathcal{L}^1(E, \mathcal{E}, \mu)$,

(ii) pour μ-presque tout $x \in E$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ (c.-à-d. dérivable, de dérivée continue),

(iii) il existe une fonction $g \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{E}, \mu)$ telle que, pour μ-presque tout $x \in E$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \leq g(x) \qquad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

Montrer que la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par $F(t) = \int f(x,t)d\mu(x)$ est bien définie et $\mathcal{C}^1$, de dérivée

$$F'(t) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)d\mu(x), \qquad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

Exercice 8.
Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue bornée. Montrer que la fonction appelée la convolution de f et g, donnée par

$$\begin{aligned} f * g : &\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ &x \mapsto \int f(t)g(x-t)dt \end{aligned}$$

est bien définie et continue.
Montrer que si g est de classe $\mathcal{C}^i$ pour $i \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ avec toutes ses dérivées bornées, alors $f * g$ est aussi de classe $\mathcal{C}^i$.