THÉORIE DE LA MESURE ET INTÉGRATION
EXERCICES – semaine 3

Exercice 1.
Soit $\epsilon > 0$. Donner un recouvrement de $\mathbb{Q}$ par un union **dénombrable** d'intervalles ouverts dont la somme des tailles est inférieure à ϵ. En autres mots, trouver $a_1, b_1, a_2, b_2 \dots \in \mathbb{R}$ avec

$$\mathbb{Q} \subset \bigcup_{n\geq 1}(a_n, b_n) \quad \text{et} \quad \sum_{n\geq 1} b_n - a_n < \epsilon.$$

Exercice 2.
Plaçons-nous sur $\mathbb{R}$. Soit $\mathcal{I} = \{(-\infty, a) : a \in \mathbb{Q}\}$. Que vaut $\sigma(\mathcal{I})$?

Exercice 3.
Observons que $\mathbb{R}^2$ a une topologie canonique et donc une tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. D'autre part $\mathbb{R}^2$ est le produit $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, et donc a une tribu produit. Montrer que

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

Généraliser cela à $\mathbb{R}^d$.

Exercice 4.
Soient E un ensemble et $\mathcal{M}$ un classe monotone sur E. Montrer que $\mathcal{M}$ est stable par union disjointe finie, à savoir que si $A, B \in \mathcal{M}$ sont tels que $A \cap B = \emptyset$, alors $A \sqcup B \in \mathcal{M}$.
Conclure que $\mathcal{M}$ est stable aussi par union disjointe dénombrable:

$$A_1, A_2, \dots \in \mathcal{M} \text{ sont deux à deux disjointes } \Rightarrow \bigsqcup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{M}.$$

Exercice 5.
Soit E un ensemble fini, avec $|E|$ pair. Posons $\mathcal{M} = \{A \subset E : |A| \text{ pair}\}$. Montrer que $\mathcal{M}$ est une classe monotone mais pas une tribu.

Exercice 6.
(a) Admettons l'existence de la mesure de Lebesgue λ sur $\mathbb{R}$. Fixons un entier $M \geq 1$ et posons

$$\mathcal{M} = \big\{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : \lambda(B \cap [0, M]) \in \mathbb{N}\big\}.$$

Montrer que $\mathcal{M}$ est une classe monotone. Exhiber un borélien qui n'appartient pas à $\mathcal{M}$.

(b) Posons $\mathcal{A} = \{[a, a+1) \cup B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : a \in [0, M-1] \text{ et } B \cap [0, M) = \emptyset\}$. Montrer que $\mathcal{A} \in \mathcal{M}$ et que $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$.
On a donc construit une classe monotone qui génère $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ mais n'y est pas égale.

(c) Posons $\mathcal{A}' = \{[a, a+1) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : a \in \mathbb{R}\}$. Que vaut $\sigma(\mathcal{A}')$? Quelle est la classe monotone engendrée par $\mathcal{A}'$.

Exercice 7.
Soient $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable, μ, ν deux mesures sur E et $\mathcal{A}$ une collection d'ensembles stable par intersections finies. Supposons que $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{E}$ et que, pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) = \nu(A)$.

(a) Si $\mu(E) < \infty$ et $E \in \mathcal{A}$, montrer que $\mu = \nu$.

(b) Supposons qu'il existe une suite $A_0 \subset A_1 \subset \ldots$ dans $\mathcal{A}$ avec $\mu(A_k) < \infty$ pour tout $k \geq 0$ et telle que $E = \bigcup_{k \geq 0} A_k$. Montrer que $\mu = \nu$.

(c) Montrer par un contre-exemple que, sans les conditions de finitude (ou σ-finitude) d'avant, on peut avoir $\mu \neq \nu$.

Exercice 8.
Admettant l'existence d'une mesure λ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ telle que $\lambda([a, b)) = b - a$ pour tout $a < b$, calculer $\lambda(\{x\})$ pour $x \in \mathbb{R}$. Déduire que $\lambda((a, b)) = \lambda([a, b)) = \lambda((a, b]) = \lambda([a, b]) = b - a$.
Calculer $\lambda(\mathbb{Q})$ et $\lambda(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.
(Argumenter aussi pourquoi $\{x\}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.)

Exercice 9.
Soit $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré et $A \in \mathcal{E}$. Montrer que $\nu(B) := \mu(A \cap B)$ pour $B \in \mathcal{E}$ définie une mesure sur $(E, \mathcal{E})$. On l'appelle la restriction de μ à A.

Exercice 10.
Admettant l'existence d'une mesure λ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ telle que $\lambda([a, b]) = b - a$ pour tout $a < b$, montrer que si $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ est tel que $\lambda(A) = 0$, alors A^c est dense dans $\mathbb{R}$.
Rappel: Un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ est dit dense si pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $\epsilon > 0$, $]x - \epsilon, x + \epsilon[$ contient au moins un point de E.

Exercice 11.
Soient $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable et $f_n : E \to \mathbb{R}$ des fonctions mesurables pour $n \geq 1$. Montrer que

- $\limsup_n f_n$ et $\liminf_n f_n$ sont des fonctions mesurables de E dans $\overline{\mathbb{R}}$;
- $\{x \in E : \lim_n f_n(x) \text{ existe}\} \in \mathcal{E}$.

Exercice 12.
Montrer que toute fonction continue par morceaux $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est mesurable.

Exercice 13.
Soit $f : E \to F$ une fonction et $\mathcal{E}$ une tribu sur E. Expliquer pourquoi $\{f(B) : B \in \mathcal{E}\}$ n'est pas forcement une tribu sur F. Donner un contre-exemple.

Exercice 14.
Soient $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction telle qu'il existe une suite de fonctions étagées convergeant ponctuellement vers f. Montrer que f est mesurable.