THÉORIE DE LA MESURE ET INTÉGRATION
EXERCICES – semaine 2

Exercice 1.
Montrer qu'un singleton $\{x\} \subset \mathbb{R}$ est Jordan-mesurable, mais que $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ ne l'est pas.

Exercice 2.
Montrer qu'une fonction continue à support compact est Riemann-intégrable.
Indication: utiliser le fait qu'une telle fonction est uniformément continue.

Exercice 3.
Fixons $a < b$. Montrer qu'un ensemble $A \subset [a,b]$ est Jordan-mesurable si et seulement si $\mathbf{1}_A$ est une fonction Riemann-intégrable. De plus, si c'est le cas,

$$\ell(A) = \int_a^b \mathbf{1}_A(x)dx.$$

Inversement, montrer qu'une fonction positive bornée $f : [a,b] \to [0,+\infty)$ est Riemann-intégrable si et seulement si l'ensemble $\{(x,y) \in [a,b] \times \mathbb{R} : 0 \le y \le f(x)\}$ est Jordan-mesurable, et que, dans le cas échéant,

$$\int_a^b f(x)dx = \ell(\{(x,y) \in [a,b] \times \mathbb{R} : 0 \le y \le f(x)\}).$$

Exercice 4.
Soit $\epsilon > 0$. Donner un recouvrement de $\mathbb{Q}$ par un union **dénombrable** d'intervalles ouverts dont la somme des tailles est inférieure à ϵ. En autres mots, trouver $a_1, b_1, a_2, b_2 \dots \in \mathbb{R}$ avec

$$\mathbb{Q} \subset \bigcup_{n\ge1}]a_n, b_n[\quad \text{et} \quad \sum_{n\ge1} b_i - a_i < \epsilon.$$

Exercice 5.
Soient E un ensemble et $\mathcal{E}$ une tribu sur E. Montrer que,

(a) si $A, B \in \mathcal{E}$, alors $A \cup B \in \mathcal{E}$, $A \cap B \in \mathcal{E}$ et $A \setminus B \in \mathcal{E}$;

(b) si $A_1, A_2 \dots \in \mathcal{E}$, alors $\bigcap_{n\ge1} A_n \in \mathcal{E}$.

Exercice 6.
Est-ce que

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A \text{ est fini,} \\ \infty & \text{si } A \text{ est infini,} \end{cases}$$

définit une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$?

La même question pour

$$\nu(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A \text{ est fini ou dénombrable,} \\ \infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 7.
Soit $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré et $A \in \mathcal{E}$. Montrer que $\nu(B) := \mu(A \cap B)$ pour $B \in \mathcal{E}$ définie une mesure sur $(E, \mathcal{E})$. On l'appelle la restriction de μ à A.

Exercice 8.
Soit $\mathcal{I}$ un ensemble et $(a_i)_{i \in \mathcal{I}} \in [0, +\infty]^{\mathcal{I}}$ une famille de nombres positifs. On pose

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} a_i := \sup \Big\{ \sum_{i \in \mathcal{J}} a_j : \mathcal{J} \subset \mathcal{I}, \mathcal{J} \text{ fini} \Big\}$$

Montrer que si $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2 \subset \mathcal{I}$ sont des ensembles disjoints, alors

$$\sum_{i \in \mathcal{I}_1} a_i + \sum_{i \in \mathcal{I}_2} a_i = \sum_{i \in \mathcal{I}_1 \sqcup \mathcal{I}_2} a_i.$$

On utilise cette notation le plus souvent quand $\mathcal{I}$ est dénombrable. Supposons que $\mathcal{I}$ n'est pas dénombrable et que $a_i > 0$ pour tout $i \in \mathcal{I}$. Montrer alors que $\sum_{i \in \mathcal{I}} a_i = \infty$.

Exercice 9.
Soient $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable, $(\mu_i)_{i \in \mathcal{I}}$ une famille de mesures sur $(E, \mathcal{E})$ et $(a_i)_{i \in \mathcal{I}} \in (0, +\infty)^{\mathcal{I}}$. Montrer que

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \mathcal{I}} a_i \mu_i : \mathcal{E} &\to [0, +\infty] \\ A &\mapsto \sum_{i \in \mathcal{I}} a_i \mu_i(A) \end{aligned}$$

est une mesure sur $(E, \mathcal{E})$.

Exercice 10.
Soit E un espace quelconque. Quelle est la tribu engendrée par l'ensemble des singletons de E?

Exercice 11.
Plaçons nous sur $\mathbb{R}$. Soit $\mathcal{I}$ l'ensemble des intervalles ouverts:

$$\mathcal{I} = \{(a, b) : a < b\}.$$

Que vaut $\sigma(\mathcal{I})$?
Et si on prenait les intervalles fermes, ou semi-ouverts?
Et si on imposait dans la définition de $\mathcal{I}$ que a et b soient rationnels?