THÉORIE DE LA MESURE ET INTÉGRATION
EXERCICES – semaine 12

Exercice 1.
Pour $E = \mathbb{N}$ et μ la mesure de comptage, on note l'espace L^2 simplement ℓ^2. C'est l'espace des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\sum_n x_n^2 < \infty$. Trouver une base orthonormée de ℓ^2.

Exercice 2.
Soit ν une mesure positive quelconque sur un espace E et $f \in L^1(E,\nu)$. Définissons $\nu : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ par

$$\mu(A) = \int_A f(x)\, d\nu(x), \qquad \forall A \in \mathcal{E}.$$

Vérifier que ν est une mesure signée sur E.

Exercice 3.
Soit μ une mesure signée sur un espace $(E,\mathcal{E})$. Montrer que, pour $A, B \in \mathcal{E}$,

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B).$$

Exercice 4.
Soient μ une mesure signée sur un espace $(E,\mathcal{E})$ et $(A_n)_{n\geq 0} \in \mathcal{E}^{\mathbb{N}}$ une suite décroissante d'ensembles. Montrer que

$$\mu\Big(\bigcap_{n\geq 0} A_n\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Indication: utiliser le passage au complémentaire.

Exercice 5.
Soient μ une mesure positive et ν une mesure signée sur un espace $(E,\mathcal{E})$. Sans utiliser la décomposition de Hahn, montrer que $\nu \perp \mu$ si et seulement si, pour tout $A \in \mathcal{E}$ avec $\mu(A) > 0$ on a $\nu(A) = 0$.

Exercice 6 (☠).
Soient μ et ν deux mesures positives de probabilité sur un même espace $(E,\mathcal{E})$. Un couplage de μ et ν est une mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sur $(E^2, \mathcal{E}\otimes\mathcal{E})$ avec marginales μ et ν, respectivement c.-à-d. telle que $\mathbb{P}(A \times E) = \mu(A)$ et $\mathbb{P}(E \times A) = \nu(A)$ pour tout $A \in \mathcal{E}$.

Le but de cet exercice est de montrer que

$$\|\mu - \nu\|_{VT} = 2 - 2 \sup_{\mathbb{P}} \mathbb{P}(\{(x,x) : x \in E\}), \tag{VT}$$

ou le sup est sur tous les couplages $\mathbb{P}$ possibles de μ et ν. (On va supposer que $E, \mathcal{E}$ sont telles que la diagonale $\{(x,x) : x \in E\}$ de E^2 est dans $\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}$.)

En autres mots, la distance en variation totale entre μ et ν est obtenue comme suit. On aimerai créer un espace de probabilité avec des variables aléatoires X et Y de lois μ et ν, respectivement. On est libre de choisir la relation entre X et Y. Si on fait le choix $\mathbb{P}$ qui minimise la probabilité que X et Y diffèrent, alors cette probabilité est la moitié distance en variation totale: $\mathbb{P}(X \neq Y) = \frac{1}{2}\|\mu - \nu\|_{VT}$.

(a) Montrer que $\|\mu - \nu\|_{VT} = 2\sup\{\mu(A) - \nu(A) : A \in \mathcal{E}\}$.
Indication: utiliser la décomposition de Hahn pour la mesure signée $\mu - \nu$; en utilisant que μ et ν sont de probabilité, montrer que $\sup\{\mu(A) - \nu(A) : A \in \mathcal{E}\} = \sup\{\nu(B) - \mu(B) : B \in \mathcal{E}\}$.

(b) Montrer que, pour un couplage $\mathbb{P}$ comme avant et $A \in \mathcal{E}$,

$$\mathbb{P}(X \in A, Y \notin A) = \mathbb{P}(X \in A) - \mathbb{P}(X \in A \text{ et } Y \in A) \geq \mathbb{P}(X \in A) - \mathbb{P}(Y \in A).$$

Utiliser le point précédent pour montrer que, pour tout couplage $\mathbb{P}$,

$$\mathbb{P}(X \neq Y) \geq \frac{1}{2}\|\mu - \nu\|_{VT}.$$

Ca peut être intéressant de traduire ces énonces de leur écriture probabiliste en écriture type théorie de la mesure.

(c) Pour l'inégalité inverse, il faut construire un couplage $\mathbb{P}$ qui atteint le sup dans (VT). Observer que $\mu - (\mu - \nu)_+ = \nu - (\mu - \nu)_-$ est une mesure positive sur E qu'on va noter τ. Calculer $\tau(E)$.

(d) Notons $\tilde{\tau}$ l'image de τ sur la diagonale $\{(x, x) : x \in E\}$ de E^2. Formellement $\tilde{\tau}(B) = \tau(\{x \in E : (x, x) \in B\})$ pour tout $B \in \mathcal{E} \otimes \mathcal{E}$.

Soit ρ un couplage de $(\mu - \nu)_+$ et $(\mu - \nu)_-$ (c.-à-d. une mesure sur E^2 avec marginales $(\mu-\nu)_+$ et $(\mu-\nu)_-$, respectivement). Calculer $\tilde{\tau}(A\times E)+\rho(A\times E)$ et $\tilde{\tau}(E\times A)+\rho(E\times A)$ pour $A \in \mathcal{E}$. Déduire la valeur de $\tilde{\tau}(E^2) + \rho(E^2)$.

(e) Conclure.