THÉORIE DE LA MESURE ET INTÉGRATION
EXERCICES – semaine 12

Exercice 1.
Soit μ une mesure positive quelconque sur un espace $(E, \mathcal{E})$ et $f \in L^1(E, \mu)$. Définissons $\nu : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ par

$$\nu(A) = \int_A f(x)\, d\mu(x), \qquad \forall A \in \mathcal{E}.$$

(a) Vérifier que ν est une mesure signée sur E. Montrer que $|\nu| = |f| d\mu$ et déduire en particulier que $\|\nu\|_{VT} = \|f\|_1$.
On peut dire que $L^1(E, \mu)$ s'injecte de manière isométrique dans $M(E, \mathcal{E})$.

(b) *Exprimer ν_+ et ν_- à l'aide de f.*

(c) *Expliciter un ensemble B tel que $\nu_+(B^c) = 0$ et $\nu_-(B) = 0$.*

Solution:

(a) *Montrons que ν est une mesure signée. On a bien $\nu(\emptyset) = 0$. De plus, si $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{E}$ sont deux a deux disjoints, alors, par le théorème de convergence monotone*

$$\sum_{n \geq 1} |\nu(A_n)| = \sum_{n \geq 1} \Big| \int \mathbf{1}_{A_n} f\, d\mu \Big| \leq \sum_{n \geq 1} \int \mathbf{1}_{A_n} |f|\, d\mu = \int \mathbf{1}_{\bigcup_n A_n} |f|\, d\mu \leq \|f\|_1 < \infty.$$

De plus, en utilisant le théorème de convergence dominée, ou la convergence est dominée par $|f| \in L^1$, on trouve

$$\begin{aligned}\sum_{n \geq 1} \nu(A_n) &= \lim_N \sum_{n=1}^N \int \mathbf{1}_{A_n} f\, d\mu = \lim_N \int \mathbf{1}_{\bigcup_{n=1}^N A_n} f\, d\mu \\ &= \int \lim_N \mathbf{1}_{\bigcup_{n=1}^N A_n} f\, d\mu = \int \mathbf{1}_{\bigcup_n A_n} f\, d\mu = \nu\Big(\bigsqcup_{n \geq 1} A_n \Big).\end{aligned}$$

Ainsi ν est bien une mesure signée.

De plus, si on prend $(A_n)_{n \geq 1}$ une partition quelconque d'un ensemble $B \in E$, le premier calcul montre que $|\nu|(B) \leq \int_B |f|\, d\mu$. Pour montrer l'inégalité inverse, considérons la partition $E = A_+ \sqcup A_-$ ou $A_+ = \{x \in E : f(x) \geq 0\}$ et $A_- = \{x \in E : f(x) < 0\}$. On a alors

$$\begin{aligned}|\nu(A_+ \cap B)| &= \Big| \int_{A_+ \cap B} f\, d\mu \Big| = \int_{A_+ \cap B} f\, d\mu = \int_{A_+ \cap B} |f|\, d\mu \quad \text{et} \\ |\nu(A_- \cap B)| &= \Big| \int_{A_- \cap B} f\, d\mu \Big| = -\int_{A_- \cap B} f\, d\mu = \int_{A_- \cap B} |f|\, d\mu.\end{aligned}$$

Ainsi $|\nu(A_+ \cap B)| + |\nu(A_- \cap B)| = \int_B |f|\,d\mu$, *ce qui montre que* $|\nu|(B) \geq \int_B |f|\,d\mu$. *En conclusion* $|\nu| = |f|\,d\mu$. *En particulier* $\|\nu\|_{VT} = |\nu|(E) = \|f\|_1$.

(b) *En utilisant l'expression pour* $|\nu|$ *et la partition* $E = A_+ \sqcup A_-$, *on trouve*

$$\nu_+(B) = \int_{A_+\cap B} f\,d\mu = \int_B f_+\,d\mu \quad \text{et}$$
$$\nu_-(B) = -\int_{A_-\cap B} f\,d\mu = \int_B f_-\,d\mu,$$

ou f_+ *et* f_- *sont les parties positives et négatives de* f, *respectivement:* $f_+ = \max\{f, 0\}$ *et* $f_- = \max\{-f, 0\}$.

(c) *Il suffit de prendre* $B = A_+$.

$\square$

Exercice 2.
Soit μ une mesure signée sur un espace $(E, \mathcal{E})$. Montrer que, pour $A, B \in \mathcal{E}$,

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B).$$

Exercice 3.
Soient μ une mesure signée sur un espace $(E, \mathcal{E})$ et $(A_n)_{n\geq 0} \in \mathcal{E}^{\mathbb{N}}$ une suite décroissante d'ensembles. Montrer que

$$\mu\Big(\bigcap_{n\geq 0} A_n\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Indication: utiliser le passage au complémentaire.

Exercice 4.
Soient μ une mesure positive et ν une mesure signée sur un espace $(E, \mathcal{E})$. Sans utiliser la décomposition de Hahn, montrer que $|\nu| \perp \mu$ si et seulement si, pour tout $A \in \mathcal{E}$ avec $\mu(A) > 0$ on a $\nu(A) = 0$.

Exercice 5.
Soient μ une mesure signée. Montrer que dans le sup de la définition (9.3) de $|\mu|$ on peut se limiter à des partitions formés de deux ensembles. Montrer aussi que le sup est atteint:

$$|\mu|(A) = \max\{|\mu(B_1)| + |\mu(B_2)| : \text{ avec } A = B_1 \sqcup B_2\}.$$

Exercice 6.
Soit E un ensemble fini ou dénombrable. Posons $\mathcal{E} = \mathcal{P}(E)$ et notons μ la mesure de comptage sur E. Soit ν une mesure signée sur $(E, \mathcal{E})$. Montrer que $\nu \ll \mu$ et déterminer la densité de ν par rapport à μ.

Exercice 7.
Soient λ la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et ν une mesure positive finie sur les compacts. Montrer que $\nu \ll \lambda$ si et seulement si il existe une fonction positive mesurable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

telle que $\nu = f\, d\lambda$.

Exercice 8 (☠).
Soient μ et ν deux mesures positives de probabilité sur un même espace $(E, \mathcal{E})$. Un couplage de μ et ν est une mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sur $(E^2, \mathcal{E} \otimes \mathcal{E})$ avec marginales μ et ν, respectivement c.-à-d. telle que $\mathbb{P}(A \times E) = \mu(A)$ et $\mathbb{P}(E \times A) = \nu(A)$ pour tout $A \in \mathcal{E}$.

Le but de cet exercice est de montrer que

$$\|\mu - \nu\|_{VT} = 2 - 2 \sup_{\mathbb{P}} \mathbb{P}(\{(x,x) : x \in E\}), \tag{VT}$$

où le supremum est pris sur tous les couplages $\mathbb{P}$ possibles de μ et ν. (On va supposer que $E, \mathcal{E}$ sont telles que la diagonale $\{(x,x) : x \in E\}$ de E^2 est dans $\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}$.)

En autres mots, la distance en variation totale entre μ et ν est obtenue comme suit. On aimerai créer un espace de probabilité avec des variables aléatoires X et Y de lois μ et ν, respectivement. On est libre de choisir la relation entre X et Y. Si on fait le choix $\mathbb{P}$ qui minimise la probabilité que X et Y diffèrent, alors cette probabilité est la moitié distance en variation totale: $\mathbb{P}(X \neq Y) = \frac{1}{2}\|\mu - \nu\|_{VT}$.

(a) Montrer que $\|\mu - \nu\|_{VT} = 2 \sup\{\mu(A) - \nu(A) : A \in \mathcal{E}\}$.
Indication: utiliser la décomposition de Hahn pour la mesure signée $\mu - \nu$; en utilisant que μ et ν sont de probabilité, montrer que $\sup\{\mu(A) - \nu(A) : A \in \mathcal{E}\} = \sup\{\nu(B) - \mu(B) : B \in \mathcal{E}\}$.

(b) Montrer que, pour un couplage $\mathbb{P}$ comme avant et $A \in \mathcal{E}$,

$$\mathbb{P}(X \in A,\, Y \notin A) = \mathbb{P}(X \in A) - \mathbb{P}(X \in A \text{ et } Y \in A) \geq \mathbb{P}(X \in A) - \mathbb{P}(Y \in A).$$

Utiliser le point précédent pour montrer que, pour tout couplage $\mathbb{P}$,

$$\mathbb{P}(X \neq Y) \geq \frac{1}{2}\|\mu - \nu\|_{VT}.$$

Ça peut être intéressant de traduire ces énonces de leur écriture probabiliste en écriture type théorie de la mesure.

(c) Pour l'inégalité inverse, il faut construire un couplage $\mathbb{P}$ qui atteint le supremum dans (VT). Observer que $\mu - (\mu - \nu)_+ = \nu - (\mu - \nu)_-$ est une mesure positive sur E qu'on va noter τ. Calculer $\tau(E)$.

(d) Notons $\tilde{\tau}$ l'image de τ sur la diagonale $\{(x,x) : x \in E\}$ de E^2. Formellement $\tilde{\tau}(B) = \tau(\{x \in E : (x,x) \in B\})$ pour tout $B \in \mathcal{E} \otimes \mathcal{E}$.

Soit ρ un couplage de $(\mu - \nu)_+$ et $(\mu - \nu)_-$ (c.-à-d. une mesure sur E^2 avec marginales $(\mu - \nu)_+$ et $(\mu - \nu)_-$, respectivement). Calculer $\tilde{\tau}(A \times E) + \rho(A \times E)$ et $\tilde{\tau}(E \times A) + \rho(E \times A)$ pour $A \in \mathcal{E}$. Déduire la valeur de $\tilde{\tau}(E^2) + \rho(E^2)$.

(e) Conclure.