THÉORIE DE LA MESURE ET INTÉGRATION
EXERCICES – semaine 11

Exercice 1.
Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Montrer que l'ensemble $I = \{p \in [1,\infty] : \|f\|_p < \infty\}$ est un intervalle (ouvert, semi-ouvert ou fermé) et que $p \mapsto \|f\|_p$ est continue sur I.
Attention: le cas de la continuité en $+\infty$ doit être traité séparément.

Exercice 2.
Soit $1 \le p \le p' \le \infty$. Donner un exemple de fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ appartenant à $L^q(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ si et seulement si $q \in [p,p']$ (respectivement $q \in (p,p')$).
Solution: *Fixons $p \le p'$. Définissions $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par*

$$f(x) = \begin{cases} x^{-1/p} & \text{pour } x \ge 1 \\ x^{-1/p'} & \text{pour } x \in (0,1) \\ 0 & \text{pour } x \le 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad g(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{x(\log x)^2}\right)^{1/p} & \text{pour } x \ge 2 \\ \left(\frac{1}{x(\log x)^2}\right)^{1/p'} & \text{pour } x \le 1/2 \\ 0 & \text{pour } x \le 0 \text{ et } x \in (1/2, 2). \end{cases}$$

Alors $f \in L^q$ si et seulement si $q \in (p,p')$ et $g \in L^q$ si et seulement si $q \in [p,p']$.

Pour montrer ce fait pour f, il suffit d'étudier son intégrabilité en 0 et $+\infty$. Il est utile de se rappeler que $x^{-\alpha}$ est intégrable en $+\infty$ si et seulement si $\alpha > 1$ et en 0 si et seulement si $\alpha < 1$. Ce dernier fait ce montre en calculant explicitement la primitive de $x^{-\alpha}$.

Pour montrer l'inclusion de g dans L^p et $L^{p'}$, observons que la primitive de $\frac{1}{x(\log x)^2}$ est $-\frac{1}{\log x}$. □

Exercice 3.
Soient $1 \le p < q \le \infty$. Donner des exemples de fonctions $(f_n)_{n\ge1}, (g_n)_{n\ge1} \in L^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda) \cap L^q(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ avec $f_n \to 0$ dans L^p mais $f_n \not\to 0$ dans L^q et $g_n \to 0$ dans L^q mais $g_n \not\to 0$ dans L^p.

Montrer que si $(h_n)_{n\ge1} \in L^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda) \cap L^q(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ est une suite de fonctions avec $h_n \to 0$ dans L^p et dans L^q, alors $h_n \to 0$ dans L^r pour tout $r \in [p,q]$.

Exercice 4.
Montrer que

$$\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d) := \left\{ f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} : \text{ de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ et } \exists K \subset E, \text{ compact t.q. } f(x) = 0, \forall x \notin K \right\}$$

est dense dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$:

(a) Trouver une fonction h de classe $\mathcal{C}^\infty$ positive, à support dans $B(0,1)$ avec $\int h(x)dx = 1$. *Ce point peut être admis.*

(b) Soit $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$. Montrer que $f * h$, la convolution de f et h, est dans $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$.

(c) Poser $h_n(x) = n^d h(nx)$ et $f_n = f * h_n$ pour $n \ge 1$. Montrer que $f_n \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ quand $n \to \infty$.

(d) Conclure en utilisant la densité de $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$.

Exercice 5.
Posons $\ell^\infty = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\mathbb{N} : (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ suite bornée}\}$ et $\ell_c = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\mathbb{N} : \exists N \in \mathbb{N} \text{ t.q. } x_n = 0 \text{ pour tout } n \geq N\}$. On muni ℓ^∞ de la norme $\|.\|_\infty$. Monter que ℓ_c est un sous-espace vectoriel de ℓ^∞. Décrire l'adherence $\overline{\ell_c}$ de ℓ_c dans ℓ^∞. Montrer que $\overline{\ell_c}$ est un espace de Banach (pour la norme $\|.\|_\infty$).
Indication: pour le dernier point, utiliser la complétude de ℓ^∞.

Exercice 6.
Montrer que $\mathcal{F}_{\text{et}}$ est un sous-espace vectoriel de L^∞. Montrer que son adhérence dans L^∞ est
$$\overline{\mathcal{F}_{\text{et}}} = \{f \in L^\infty : \text{ pour tout } \epsilon > 0 \ \mu(\{x \in E : |f(x)| > \epsilon\}) < \infty\}.$$

Conclure que si $\mu(E) < \infty$, alors $\mathcal{F}_{\text{et}}$ est dense dans L^∞. Donner un contre-exemple quand $\mu(E) = \infty$.