# THÉORIE DE LA MESURE ET INTÉGRATION
## EXERCICES – semaine 10

**Exercice 1.**
Soient $(E, d)$ un espace métrique et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $E$. Montrer que si $(x_n)$ contient une sous-suite $(x_{\sigma(n)})$ qui convergent vers un point $x \in E$, alors $x_n \to x$.

**Exercice 2.**
Soit $(E, d)$ un espace métrique localement compact (c.-à-d. tel que pour tout $x \in E$, il existe $\epsilon > 0$ tel que $\overline{B}_\epsilon(x) = \{y \in E : d(x, y) \leq \epsilon\}$ est compact).
Attention! le $\epsilon > 0$ dans la locale compacité peut dépendre de $x$.

Soit de plus $K$ un compact et posons $K^{(\delta)} = \{y \in E : \operatorname{dist}(y, K) \leq \delta\}$. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ assez petit pour que $K^{(\delta)}$ soit compact.
*Indication:* Ecrire $K$ comme une reunion finie de boules ouvertes, précompactes.

**Exercice 3.**
Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Montrer que l'ensemble $I = \{p \in [1, \infty] : \|f\|_p < \infty\}$ est un intervalle (ouvert, semi-ouvert ou fermé) et que $p \mapsto \|f\|_p$ est continue sur $I$.

**Exercice 4.**
Soit $1 \leq p \leq p' \leq \infty$. Donner un exemple de fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ appartenant à $L^q(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ si et seulement si $q \in [p, p']$ (respectivement $q \in (p, p')$).

**Exercice 5.**
Soient $1 \leq p < q \leq \infty$. Donner des exemples de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}, (g_n)_{n\geq 1} \in L^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda) \cap L^q(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ avec $f_n \to 0$ dans $L^p$ mais $f_n \not\to 0$ dans $L^q$ et $g_n \to 0$ dans $L^q$ mais $g_n \not\to 0$ dans $L^p$.

Montrer que si $(h_n)_{n\geq 1} \in L^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda) \cap L^q(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ est une suite de fonctions avec $h_n \to 0$ dans $L^p$ et dans $L^q$, alors $h_n \to 0$ dans $L^r$ pour tout $r \in [p, q]$.

**Exercice 6.**
Montrer que

$$\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d) = \big\{f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} : \text{ de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ et } \exists K \subset E, \text{ compact t.q. } f(x) = 0, \forall x \notin K\big\}$$

est dense dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$:

(a) Trouver une fonction $h$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ positive, à support dans $B(0, 1)$ avec $\int h(x)dx = 1$. *Ce point peut être admis.*

(b) Soit $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$. Montrer que $f * h$, la convolution de $f$ et $h$, est dans $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$.

(c) Poser $h_n(x) = n^d h(nx)$ et $f_n = f * h_n$ pour $n \geq 1$. Montrer que $f_n \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ quand $n \to \infty$.

(d) Conclure en utilisant la densité de $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$.