PROBABILITÉS
Exercices semaine 4: *Vecteurs Gaussiens*

A regarder pour cette seance: les exercices 3&4 de la série précédente et les suivants:

Soit $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ un vecteur ligne et $\Sigma \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive[(i)]. On dit que $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$ est un **vecteur gaussien** de moyennes μ et matrice de covariance Σ s'il admet la densité

$$f_{\mathbf{Y}}(y_1, \dots, y_n) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(\Sigma)}} \exp\Big[-\frac{1}{2}(\mathbf{y}-\mu)\Sigma^{-1}(\mathbf{y}-\mu)^T \Big],$$

ou on écrit $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathcal{M}_{1,n}$.

L'exemple le plus simple est celui de n gaussiennes standard indépendantes $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ dont la densité est

$$f_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{k=1}^{n} f_{X_k}(x_k) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \exp\big[-\tfrac{1}{2}(x_1^2 + \dots + x_n^2) \big] = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \exp\big(-\tfrac{1}{2}\mathbf{x}\,\mathbf{x}^T \big).$$

Cela rentre bien dans le cadre des vecteurs gaussiens (avec $\Sigma = I_n$ et $\mu = (0, \dots, 0)$).

Exercice 1.
Soit $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ ou $X_1, \dots, X_n$ sont des gaussiennes standard indépendantes. De plus, soit $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$ un vecteur gaussien général (avec matrice de covariance Σ et moyennes μ),

(a) Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible et $B \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ un vecteur ligne. Posons $\mathbf{Z} = \mathbf{Y}A + B \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$.

En utilisant le changement de variable, calculer la densité de $\mathbf{Z}$ et déduire que c'est un vecteur gaussien de moyenne $B + \mu A$ et matrice de covariance $A^{-1}\Sigma^{-1}(A^{-1})^T$ (cette dernière est encore symétrique et définie positive).

(b) Sachant que Σ, comme toute matrice symétrique et définie positive, s'écrit $\Sigma = A^T A$ pour une certaine matrice inversible A, déduire que $\mathbf{X}A + \mu$ admet la même densité que $\mathbf{Y}$, donc qu'ils sont de même loi.

(c) Conclure que tout vecteur gaussien peut être construit comme combinaison linéaire de gaussiennes standard indépendantes.

Exercice 2.
Soit $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$ un vecteur gaussien comme dans l'exercice précédent (de matrice de covariance Σ et moyennes μ).

[(i)] c.-à-d. telle que $U\Sigma U^T > 0$ pour tout vecteur ligne $U \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ non-nul.

(a) Calculer la densité de Y_1 et déduire que c'est une gaussienne de moyenne et variance à déterminer.

(b) Montrer que pour tout $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$,

$$\tilde{Y} = \lambda_1 Y_1 + \cdots + \lambda_n Y_n$$

est une gaussienne de moyenne et variance à déterminer.
Indication: En supposant que $\lambda_1 \neq 0$, utiliser le changement de variable

$$(y_1, \ldots, y_n) \mapsto (\lambda_1 y_1 + \cdots + \lambda_n y_n, y_2, \ldots, y_n),$$

pour déduire que $(\tilde{Y}, Y_2, \ldots, Y_n)$ est un vecteur gaussien.

Exercice 3.
Soit $\mathbf{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)$ un vecteur gaussien comme dans l'exercice précédent (de matrice de covariance Σ et moyennes μ). Calculer $\mathbb{E}(Y_i)$ et $\mathrm{Cov}(Y_i, Y_j)$ et déduire que la matrice Σ contient bien les covariances des variables Y_i et que μ est bien le vecteur des esperances des variables Y_i.

Exercice 4.
Soit $\mathbf{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)$ un vecteur aléatoire, avec la propriété que pour tous $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, $\sum_{i=1}^n \lambda_i Y_i$ est une variable gaussienne. Le but de cet exercice est de montrer que $\mathbf{Y}$ est un vecteur gaussien.

Notons $\Sigma_{i,j} = \mathrm{Cov}(Y_i, Y_j)$ et $\mu_i = \mathbb{E}(Y_i)$. Soit $\mathbf{X}$ un vecteur gaussien de matrice de covariance Σ et moyennes μ.

(a) Supposons que $\Sigma = I_n$ et $\mu = (0, \ldots, 0)$. Calculer pour $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$,

$$\Phi_{\mathbf{Y}}(t_1, \ldots, t_n) := \mathbb{E}\Big[\exp\Big(i \sum_{i=1}^n t_i Y_i\Big)\Big].$$

Montrer que $\Phi_{\mathbf{Y}}(t_1, \ldots, t_n) = \Phi_{\mathbf{X}}(t_1, \ldots, t_n)$.

(b) Passons au cas général. Soit $A \in \mathcal{M}_n$ une matrice telle que $AA^T = \Sigma^{-1}$. Montrer que le vecteur $(\mathbf{Y} - \mu)A$ satisfait les conditions du point précédent. Déduire que $\Phi_{(\mathbf{Y}-\mu)A}(t_1, \ldots, t_n) = \Phi_{(\mathbf{X}-\mu)A}(t_1, \ldots, t_n)$.

(c) En utilisant l'injectivité de la transformé de Fourrier (c.à d. le fait que la fonction caractéristique détermine la loi), conclure que $\mathbf{Y}$ est un vecteur gaussien.