PROBABILITÉS
Exercices

Exercice 1.
Soient X, Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}$. Supposons que X est $\sigma(Y)$-mesurable. Le but de cet exercice est de construire une fonction mesurable $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $X = \Phi(Y)$.

(a) Montrer que $\sigma(Y) = \{\{Y \in A\} : A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$.

(b) Pour $n \geq 0$, construire une fonction mesurable $\Phi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ à valeurs dans $\{k2^{-n} : k \in \mathbb{Z}\}$ telle que
$$\Phi_n(Y) \leq X < \Phi_n(Y) + 2^{-n}.$$

(c) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$ la suite $\Phi_n(t)$ converge quand $n \to \infty$ vers une limite qu'on note $\Phi(t) \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction Φ ainsi définie est mesurable.

(d) Conclure.

(e) Montrer inversement, que pour toute fonction mesurable $\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\Psi(Y)$ est une variable aléatoire $\sigma(Y)$-mesurable.

Exercice 2.
Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ un processus à valeurs dans $\mathbb{Z}$ et $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ la filtration canonique associée. Pour $A \subset \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ mesurable pour la tribu produit, on dit que $(x_1, \ldots, x_t)$ décide A si $\mathbb{P}(X_1 = x_1, \ldots, X_t = x_t) > 0$ et
$$\mathbb{P}(X \in A \,|\, X_1 = x_1, \ldots, X_t = x_t) = 1.$$

Montrer qu'une variable T à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ est un temps d'arrêt pour $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ si et seulement s'il existe $A \subset \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ mesurable pour la tribu produit tel que,
$$T = \inf\{t \geq 1 : (X_1, \ldots, X_t) \text{ décide } A\} \qquad p.s.$$

Exercice 3.

(a) Soient S, T deux temps d'arrêt. Montrer que $\max\{S, T\}$ et $\min\{S, T\}$ sont aussi tes temps d'arrêt.

(b) Soient $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des temps d'arrêt. Montrer que $\sup\{T_n : n \in \mathbb{N}\}$, $\inf\{T_n : n \in \mathbb{N}\}$, $\limsup_n T_n$ et $\liminf_n T_n$ sont aussi des temps d'arrêt.

Exercice 4 (Décomposition de Doob)**.**
Soit X une sous-martingale. Montrer qu'il existe une unique paire de processus (A_n) et (M_n) tels que

(i) (M_n) est une martingale,

(ii) (A_n) est un processus prévisible, croissant avec $A_0 = 0$,

(iii) $X_n = M_n + A_n$ pour tout n.

Indication: Construire A_n, puis M_n de manière récursive.
Soient (B_n) est une famille d'événements et $X_n = \sum_{m \le n} \mathbf{1}_{B_m}$. Montrer que (X_n) est une sous-martingale et calculer sa décomposition.

Exercice 5.
Soit $S_n = \sum_{k=1}^n Y_k$ une marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$ (c.-à-d. les $(Y_k)_{k\ge1}$ sont i.i.d. uniformes dans $\{\pm1\}$). Fixons $a < 0 < b$. Calculer $\mathbb{E}(S^2_{\tau_a \wedge \tau_b})$ et en déduire $\mathbb{E}(\tau_a \wedge \tau_b)$.
Attention: motivez correctement vos arguments!

Exercice 6.
Soit $S_n = \sum_{k=1}^n Y_k$ une marche aléatoire biaisée sur $\mathbb{Z}$, c.-à-d. les $(Y_k)_{k\ge1}$ sont i.i.d. avec $\mathbb{P}(Y_k = 1) = p$ et $\mathbb{P}(Y_k = -1) = 1 - p$ pour un certain $p \in [0, 1]$, $p \ne 1/2$.

(a) Montrer que $(S_n - (2p-1)n)_{n\ge0}$ et $(Y_n)_{n\ge0} = \left[\left(\frac{1-p}{p}\right)^{S_n}\right]_{n\ge0}$ sont des martingales.

(b) Pour $a < 0 < b$, calculer $\mathbb{P}(\tau_a < \tau_b)$ et $\mathbb{E}(\tau_a \wedge \tau_b)$.

(c) Déduire que $\tau_a < \infty$ p.s. si et seulement si $p \le 1/2$.

(d) Dessiner une trajectoire typique de (S_n) quand $p < 1/2$ et une quand $p > 1/2$.

Exercice 7.
Un singe écrit à une machine à écrire à 26 touche. A chaque instant, il frappe une touche au hasard. On attend jusqu'à ce qu'il écrit `abracadabra`; notons T le temps que ca lui prend (en supposant qu'il écrit une lettre par unité de temps). Le but de cet exercice est de trouver $\mathbb{E}(T)$.

On note $(L_n)_{n\ge1}$ la sequence aléatoire de lettres produites par le signe et $(\mathcal{F}_n)$ la filtration associée.

(a) Argumenter que $T < \infty$ p.s. et que $\mathbb{E}(T) < \infty$.

(b) Supposons que, à chaque instant, un joueur peut arriver et miser une somme x sur une lettre ℓ. Si la lettre suivante est ℓ le joueur gagne $26x$, sinon le singe récupère l'argent. Soit $(X_n)_n$ un processus prévisible. Supposons que avant la $k$éme lettre un joueur place une mise de X_k sur une certaine lettre ℓ_k (ce-ci pour chaque k). Notons $(Z_n)_{n\ge1}$ la somme accumulée par le singe après les n premières lettres. Montrer que $(Z_n)_{n\ge1}$ est une martingale.

(c) Supposons que avant la première lettre, un joueur mise 1chf sur la lettre `a`. S'il gagne, il mise tout ce qu'il à gagner sur la seconde lettre étant `b`, s'il gagne encore il mise tout sur `r` et ainsi de suite. Il quitte la table s'il perd, ou s'il gagne 11 fois de suite pour les lettres `abracadabra`. Supposons de plus que avant chaque lettre, un nouveau joueur arrive avec 1chf et joue le même jeu (concernant les 11 lettre qui suivent).
Argumenter que le la somme Z_n accumulée par le singe après les n premieres lettres est bien une martingale.

(d) Que vaut Z_T dans ce contexte?

(e) Calculer $\mathbb{E}(T)$.