PROBABILITÉS
Exercices

Les exercices sont à préparer pour le **mardi 22 mai**. Ils vont être traités en classe ce jour la.

Les premiers exercices sont proches du cours et devraient être accessibles. Les exercices sur les couplages sont plus abstraits et plus loin du fil du cours. Ils s'adresse surtout aux étudiants intéresses par le sujet. Let exercices sur le modèle d'Ising utilisent des maths basiques (à part quelques points) et devraient être abordables. Ils offrent un aperçu sur le domaine de la mecanique statistique.

Chaines de Markov: généralités

Exercice 1.
Supposons que E est un espace fini ($E = \{1, \dots, N\}$) et considérons une chaine de Markov sur E de matrice de transition Q. Observons qu'une mesure μ sur E peut être écrite comme vecteur ligne $\mu = (\mu(1), \dots, \mu(N))$.

(a) Montrer qu'une mesure μ est invariante pour la chaine de Markov s.s.i μ^T est un vecteur propre de Q^T pour une certaine valeur propre à expliciter.

(b) Supposons que $Q(x, y) > 0$ pour tous $x, y \in E$. Utiliser le theorem de Perron Frobenius pour montrer l'existence et l'unicité de la mesure de probabilité invariante μ.
Indication: il faut montrer que la valeur propre de Perron Frobenius est 1. Pour cela, utiliser le fait que Q est stochastique et que le vecteur propre de Perron Frobenius a toutes ses entrées positives.

(c) Supposons que Q^T est diagonalisable et notons $\mu^T, \mu_2^T, \dots, \mu_N^T$ ses vecteurs propres. Montrer que pour tout $j \geq 2$,
$$\sum_{x \in E} \mu_j(x) = 0.$$

(d) Soit ν une mesure de probabilité sur E. Expliquer pourquoi on peut écrire
$$\nu = \lambda_1 \mu + \lambda_2 \mu_2 + \dots + \lambda_N \mu_N.$$
Déduire du point précédent que $\lambda_1 = 1$.

(e) Conclure que $\nu Q_n \xrightarrow[n \to \infty]{VT} \mu$ exponentiellement vite. Plus précisément, qu'il existe des constantes $c, C > 0$ telles que
$$\sum_{x \in E} |(\nu Q_n)(x) - \mu(x)| < Ce^{-cn}, \qquad \forall n \geq 1.$$

(f) Montrer qu'on peut remplacer la condition $Q(x, y) > 0$, $\forall x, y \in E$ par la condition "il existe $n_0 \geq 1$ tel que $Q_{n_0}(x, y) > 0$, $\forall x, y \in E$". Montrer que celle-ci est satisfait si et seulement si la chaine est irréductible et apériodique.

(g) Montrer qu'on peut se débarrasser de l'hypothèse que Q^T est diagonalisable.

Exercice 2. (a) Soit $G = (V, E)$ un graphe bipartit. Montrer que la marche aléatoire simple (X_n) sur G n'est pas apériodique.

(b) Supposons en plus que G est fini et soit μ l'unique mesure invariante de probabilité pour la m.a. simple. Monter que, pour tout $x \in V$ et tout $n \geq 0$, $d_{\mathrm{VT}}(\delta_x Q_n, \mu) \geq 1/2$, ou Q est la matrice de transition de la m.a. simple et δ_x est la mesure de Dirac en x.

(c) La "lazy random walk" sur G est une m.a. qui, à chaque pas, reste sur place avec probabilité $1/2$ et fait un pas de la m.a. simple avec probabilité $1/2$. Ecrire la matrice de transition de la lazy random walk sur G. Montrer qu'elle est irréductible et apériodique. Montrer qu'elle a la même mesure invariante que la marche aléatoire simple.

Exercice 3.
Soit (X_n) une chaine de Markov irréductible de matrice de transition Q sur un espace E.

(a) Monter que $d(x) = \min\{m - n : m > n \text{ avec } Q_m(x, x) > 0 \text{ et } Q_n(x, x) > 0\}$.

(b) Monter que $d(x) = d(y)$ pour tous $x, y \in E$. On appelle cette valeur la période de la chaine de Markov et on la note d.

(c) Monter que, si $d = 1$, alors il existe n_0 tel que, pour tous $n > n_0$, $Q_n(x, x) > 0$.

(d) Supposons que (X_n) est une marche aléatoire sur un graphe non-orienté G. Quelles sont les valeurs possible de d?

(e) Construire un exemple avec $d = 3$.

Exercice 4 (Temps couvrant pour la m.a. simple sur le graphe complet)**.**
Soit $K_N = (V, E)$ le graphe complet à N sommets et (X_n) la marche aléatoire simple sur K_N partant d'un sommet u_0. Notons τ le premier moment ou tous les sommets de K_N sont visités par la marche aléatoire.

(a) Montrer que τ est un temps d'arrêt.

(b) Posons $T_k = \inf\{n : \#\{X_0, X_1, \dots, X_n\} = k\}$ pour $k \geq 1$. Argumenter que les variables $T_{k+1} - T_k$ pour $1 \leq k < N$ sont indépendantes et donner leur lois.

(c) En utilisant le point précédent, montrer que $\mathbb{E}(\tau) = (N-1)\sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k}$. Conclure que $\mathbb{E}(\tau) = (1 + o(1))N \log N$.

(d) Calculer $\mathrm{Var}(\tau)$.

(e) Montrer que pour tout $c > 0$, $\mathbb{P}(\tau > N \log N + cN) \leq e^{-c}$.
Indication: pour $v \in V$, définir l'événement $A_v = \{v \notin \{X_0, \dots, X_{\lfloor N \log N + cN \rfloor}\}\}$ et calculer sa probabilité. Utiliser le fait que $\{\tau > N \log N + cN)\} = \bigcup_{v \in V} A_v$.

Couplage

Exercice 5.
Soient F_1, F_2 deux fonctions de répartition sur $\mathbb{R}$ avec $F_1(t) \geq F_2(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Construire deux v.a. X, Y (c.-à-d. un espace de proba $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ et deux v.a. sur Ω) telles que

- $\mathbb{P}(X \leq t) = F_1(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ (c.-à-d. la fonction de répartition de X est F_1),
- $\mathbb{P}(Y \leq t) = F_2(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ (c.-à-d. la fonction de répartition de Y est F_2),
- $\mathbb{P}(X \leq Y) = 1$.

Indication: penser a comment construire X et Y à partir d'une v.a. uniforme sur $[0, 1]$. Vous pouvez commencer en supposant que F_1 et F_2 sont strictement croissantes et continues.

Exercice 6.
On considère deux marches aléatoires simples (X_n) et (Y_n) sur $\mathbb{Z}$ avec $X_0 = 1$ et $Y_0 = -1$. Le but de cet exercice est de construire des couplages entre ces deux marchers à fin d'estimer la distance en variation totale entre la loi de X_n et celle de Y_n. Dans tous les couplages, on utilise la notation $\tau = \inf\{n : X_n = Y_n\}$.

(a) (Difficile) Expliquer pourquoi, si $\mathbb{P}$ est un couplage des deux marches aléatoires tel que $(X_n, Y_n)_{n\geq 0}$ est de Markov, on a $d_{\mathrm{VT}}(X_n, Y_n) \leq 2\mathbb{P}(\tau > n)$.

(b) Proposer un couplage $\mathbb{P}$ tel que $\mathbb{P}(\tau = \infty) = 1$.

(c) Pour le couplage $\mathbb{P}$ ou (X_n) est indépendante de (Y_n), décrire la loi de $Z_n = X_n - Y_n$. Montrer que (Z_n) est une lazy random walk sur $2\mathbb{Z}$ et que $\tau = \inf\{n : Z_n = 0\}$.

(d) Proposer un couplage ou $(X_n - Y_n)_{n\geq 0}$ est une marche aléatoire simple sur $2\mathbb{Z}$. Conclure que $d_{\mathrm{VT}}(X_n, Y_n) \leq 2\mathbb{P}(0 \notin \{X_0, \dots, X_n\})$.

Exercice 7.
Soit Q une matrice de transition dont les chaines de Markov sont irréductibles, récurrente positives avec mesure invariante de probabilité μ. On définit une matrice de transition $\overline{Q}$ sur $E \times E$ par

$$\overline{Q}\big((x_1, z_1), (x_2, z_2)\big) = Q(x_1, x_2)Q(z_1, z_2), \qquad \forall x_1, x_2, z_1, z_2 \in E.$$

(a) Montrer que $\overline{Q}$ est une matrice stochastique.

(b) Montrer que, si (X_n, Z_n) est une chaine de Markov de matrice de transition $\overline{Q}$ avec $X_0 \perp\!\!\!\perp Z_0$, alors les chaines $(X_n)_n$ et $(Z_n)_n$ sont indépendantes, de Markov, de matrice de transition Q.

(c) Montrer que la mesure $\mu \otimes \mu$ (donnée par $(\mu \otimes \mu)(x, z) = \mu(x)\mu(z)$ pour $x, z \in E$) est invariante pour $\overline{Q}$.

(d) Posons $\tau = \inf\{n : X_n = Z_n\}$ et

$$Y_n = \begin{cases} Z_n & \text{si } \tau \leq n, \\ X_n & \text{si } \tau > n. \end{cases}$$

Montrer que $(X_n, Y_n)_{n\geq 0}$ est de Markov et donner sa matrice de transition. Montrer que (Y_n) est de Markov de matrice de transition Q.

Ising

Exercice 8.
Soit $G = (V, E)$ un graphe fini connecté. L'espace de configurations du modèle d'Ising sur G est $\Omega = \{\pm 1\}^V$; une configuration est notée $\sigma = (\sigma(v))_{v\in V}$ avec $\sigma(v) \in \{-1, +1\}$ étant le spin de v. Pour $\beta > 0$, on défini la mesure de probabilité sur Ω

$$\mu_\beta(\sigma) = \frac{1}{Z(G,\beta)} \exp\Big[\beta \sum_{\{u,v\}\in E} \sigma(u)\sigma(v)\Big].$$

(a) Donner une formula pour $Z(G, \beta)$ pour que μ_β soit une mesure de probabilité.

(b) Quelles sont les configurations qui maximisent μ_β. Si G est bipartit, quelles sont les configurations qui minimisent μ_β?

(c) Calculer $Z(G, \beta)$ quand G est une ligne avec n sommets, ensuite quand $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

(d) Pour G le graphe complet à n sommets, écrire $Z(G, \beta)$ comme une somme de $n + 1$ terms.

(e) (DIFFICILE) Soit $H = (V_H, E_H)$ un graphe fini et posons $G_n = H \otimes (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$. Donner une formule pour $Z(G_n, \beta)$ en fonction du spectre d'une matrice carrée de taille $2^{|V_H|}$. Déduire
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log Z(G_n, \beta).$$

Exercice 9.
On se place dans le même cadre que dans l'exercice précédent. Pour un sommet $u \in V$ et une configuration $\sigma_0 \in \Omega$, calculer

$$p(\sigma_0, u) := \mu_\beta\big[\sigma(u) = +1 \,\big|\, \sigma(v) = \sigma_0(v)\, \forall v \neq u\big].$$

La dynamique de Glauber est une chaine de Markov $(\sigma_n)_{n\geq 0}$ sur Ω avec l'évolution suivante. Pour passer de σ_n à σ_{n+1} on choisie un sommet u uniformément dans V. On pose $\sigma_{n+1}(v) = \sigma_n(v)$ pour tous $v \neq u$ et

$$\sigma_{n+1}(u) = \begin{cases} +1 & \text{avec probabilité } p(\sigma_n, u) \\ -1 & \text{avec probabilité } 1 - p(\sigma_n, u). \end{cases}$$

(a) Soit Q la matrice de transition de cette chaine de Markov. Ecrire $Q(\sigma, \sigma')$ pour $\sigma \neq \sigma'$.

(b) Montrer que cette chaine est irréductible et apériodique.

(c) Montrer que cette chaine est réversible pour la mesure μ_β.

(d) Conclure que, pour tout choix de σ_0, la loi de σ_n converge quand $n \to \infty$ vers μ_β en variation totale.