PROBABILITÉS
Exercices

Exercice 1.
Soient $(X_i)_{i\geq 1}$ des v.a. i.i.d. dans L^2, d'esperance 0. Posons $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Montrer que pour tout $\alpha > 1/2$,
$$\frac{1}{n^\alpha} S_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0.$$

Exercice 2.
Soient $(X_i)_{i\geq 1}$ des v.a. i.i.d. dans L^2, d'esperance 0 et variance positive. Posons $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

(a) Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$ l'événement $\limsup_n \frac{1}{\sqrt{n}} S_n \geq a$ a probabilité 0 ou 1. Conclure que $\limsup S_n/\sqrt{n}$ est une v.a. constante à valeurs dans $[-\infty, +\infty]$.
Indication: Montrer que $\{\limsup_n \frac{1}{\sqrt{n}} S_n \geq a\} \in \mathcal{F}_\infty$.

(b) En utilisant le TCL, montrer que $\mathbb{P}(\limsup_n \frac{1}{\sqrt{n}} S_n \geq a) > 0$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

(c) Conclure que $\limsup_n \frac{1}{\sqrt{n}} S_n = +\infty$ et $\liminf_n \frac{1}{\sqrt{n}} S_n = -\infty$ p.s.

(d) Montrer que $\frac{1}{\sqrt{n}} S_n$ ne converge pas en probabilité.

Exercice 3.
Soit $(A_k)_{k\geq 0}$ une énumeration des parties finies de $\mathbb{N}^*$ avec $A_0 = \emptyset$ et, pour tout $n \geq 1$, $\{A_0, \ldots, A_{2^n-1}\} = \mathcal{P}(\{1, \ldots, n\})$. Soient $(Y_i)_{i\geq 1}$ des v.a. i.i.d., uniformes sur $\{-1, 1\}$. Pour $k \geq 1$, posons
$$X_k = \prod_{i\in A_k} Y_i.$$

(a) Calculer la loi de X_k, son esperance et sa variance.

(b) Montrer que pour $k \neq \ell$, X_k est indépendante de X_ℓ. Ainsi les variables $(X_k)_{k\geq 1}$ sont deux à deux indépendantes.

(c) Montrer que
$$S_{2^n-1} := \sum_{k=1}^{2^n-1} X_k = \prod_{i=1}^{n} (1 + Y_i) - 1.$$
Déterminer la loi de S_{2^n-1}.

(d) Conclure que l'indépendance deux à deux ne suffit pas pour le TCL.

Exercice 4.
Soient $\alpha, \beta \in (0, 1)$. On considère une urne avec n billes, αn noires et $(1-\alpha)n$ blanches. On en tire βn sans remise et on note Z_n le nombre de billes noires tirées. (On va supposer que tous les produits αn etc. sont entiers).

(a) Calculer l'esperance de Z_n et de Z_n^2.

(b) Calculer la loi de Z_n.

(c) Montrer que $\frac{1}{\sqrt{n}}[Z_n - \mathbb{E}(Z_n)]$ converge en loi. Déterminer la limite.
Indication: utiliser le point précédent pour calculer $\mathbb{P}(\frac{1}{\sqrt{n}}[Z_n - \mathbb{E}(Z_n)] > t)$.

Exercice 5.
Soit $(X_1^{(n)}, \dots, X_n^{(n)})$ un point uniforme sur la sphère $\mathbb{S}^{n-1}$ de $\mathbb{R}^n$.

(a) Déterminer la loi de $X_1^{(n)}$.

(b) Montrer que $\sqrt{n}\, X_1^{(n)}$ converge en loi vers une loi normale.

Exercice 6.
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ et X des v.a.

(a) Supposons que $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$. Montrer que $X_n \xrightarrow{(d)} X$.

(b) Supposons que $X_n \xrightarrow{(d)} X$ et que X est p.s. constante. Montrer que $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$.

(c) Donner un contre-exemple au point précendent quand X n'est pas constante.

Exercice 7.
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ et $(Y_n)_{n\geq 1}$ des v.a.

(a) Supposons que les suites (X_n) et (Y_n) convergent en loi. Supposons de plus que $X_n \perp\!\!\!\perp Y_n$ pour tout n. Montrer que $(X_n + Y_n)_n$ converge en loi; déterminer la limite.

(b) Donner un contre-exemple au point précendent quand X_n et Y_n ne sont pas indépendantes.