# PROBABILITÉS
## Exercices

**Exercice 1.**

(a) **Inégalité de Kolmogorov:** Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ des v.a. réelles dans $L^2$, indépendantes telles que $\mathbb{E}(X_n) = 0$. pour tout $n$ Posons $S_N = \sum_{n=1}^N X_n$. Montrer que, pour tout $\epsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\big(\max_{1\leq n\leq N} |S_n| \geq \epsilon\big) < \frac{1}{\epsilon^2}\sum_{n=1}^N \mathrm{Var}(X_n).$$

*Indication:* Pour $n \leq N$, poser $A_n = \{|S_n| \geq \epsilon \text{ mais } |S_m| < \epsilon \text{ pour tout } m < n\}$. Observer que $\{\max_{1\leq n\leq N} |S_n| \geq \epsilon\} = \bigsqcup_{n=1}^N A_n$, que $A_n$ est indépendant de $X_{n+1}, \dots, X_N$ et que

$$\mathbb{E}(S_N^2) \geq \sum_{n=1}^N \mathbb{E}(S_N^2 \mathbf{1}_{A_n}).$$

(b) Supposons en plus que $\sum_{n\geq 1} \mathrm{Var}(X_n) < \infty$. Montrer que $S_N$ converge p.s.
*Indication:* En utilisant l'inégalité précédente pour $\max_{m\geq N} |S_m - S_N|$; montrer que la suite $(S_N)_{N\geq 1}$ est p.s. de Cauchy.

**Exercice 2.**
Soit $X$ un v.a. réele positive. Montrer que

$$\mathbb{E}(X) = \int_{t=0}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq t)\, dt \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(X^2) = \int_{t=0}^{\infty} 2t\, \mathbb{P}(X \geq t)\, dt. \tag{0.1}$$

*Indication:* utiliser la formule $\mathbb{E}(X^p) = \int_{u=0}^\infty u^p \, d\mu_X(u)$ ou $\mu_X$ est la loi de $X$.

**Exercice 3** (Autre preuve de la LGN)**.**
Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ des v.a. á valeurs dans $[0, +\infty)$, deux à deux indépendantes, identiquement distribuées et dans $L^1$. Notons $\mu = \mathbb{E}(X_1)$ et $S_N = X_1 + \cdots + X_N$. Le but est de monter que $\frac{1}{N} S_N \to \mu$ p.s..

Posons, pour chaque $n \geq 1$, $Y_n = \min\{X_n, n\}$.

(a) Monter que, avec probabilité 1, il existe au plus un nombre fini de $n$ tels que $Y_n \neq X_n$.
*Indication:* utiliser (0.1) et le lemme de Borel Cantelli.

(b) Posons $T_N = Y_1 + \cdots + Y_N$. Monter que $\frac{1}{N} T_N \xrightarrow[N\to\infty]{p.s.} \mu$ si et seulement si $\frac{1}{N} S_N \xrightarrow[N\to\infty]{p.s.} \mu$.

Le but de reste de l'exercice est donc de montrer que $\frac{1}{N}T_N \xrightarrow[N\to\infty]{p.s.} \mu$.

(c) Soit $\alpha > 1$. Montrer que pour tout $\epsilon > 0$,

$$\sum_{k\geq 1} \mathbb{P}\Big(\big|T_{\lfloor \alpha^k \rfloor} - \mathbb{E}(T_{\lfloor \alpha^k \rfloor})\big| > \epsilon\, \alpha^k\Big) \leq \frac{4}{(1-\alpha^{-2})\epsilon^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mathrm{Var}(Y_m)}{m^2}.$$

*Indication:* utiliser l'inégalité de Tchebychev et un changement d'ordre de sommation.

(d) En utilisant (0.1) et le théorème de Fubini, montrer que

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mathrm{Var}(Y_m)}{m^2} \leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}(Y_m^2)}{m^2} < \infty.$$

*Indication:* ca peut être utile d'observer que, pour $t > 1$, $\sum_{m\geq t} \frac{1}{m^2} \leq \int_{s=t-1}^{\infty} \frac{1}{s^2} ds = \frac{1}{t-1}$.

(e) Conclure que $\frac{1}{\alpha^k} T_{\lfloor \alpha^k \rfloor} \xrightarrow[N\to\infty]{p.s.} \mu$.

(f) Déduire que $\limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N} T_N \leq \alpha\mu$ p.s. et $\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N} T_N \leq \frac{1}{\alpha}\mu$ p.s..
*Indication:* Borner $\frac{1}{N} T_N$ en fonction de $\frac{1}{\alpha^k} T_{\lfloor \alpha^k \rfloor}$ et $\frac{1}{\alpha^{k+1}} T_{\lfloor \alpha^{k+1} \rfloor}$, ou $k = \lfloor \log_\alpha N \rfloor$.

(g) Conclure.

(h) En traitant séparement la partie positive et la partie négative, se débarasser de l'hypostèse de positivité des $X_n$.

*Notation:* $\lfloor x \rfloor$ représente la partie entière de $x$. Remplacez $\lfloor \alpha^k \rfloor$ par simplement $\alpha^k$ pour alleger les notations.