26/04/2017

Probabilités : Exercices.

semaine 9 - martingales dans L^p.

Rappel : pour une v.a. X, on pose $\|X\|_p = \mathbb{E}(|X|^p)^{1/p}$ pour $p \geq 1$. On dit que $X \in L^p$ si $\|X\|_p < \infty$.

Alors L^p forme un espace de Banach pour la norme $\|.\|_p$.

Le but de cette série est de prouver le théorème suivant.

Thm : Soient $p > 1$ et $(X_n)_{n \geq 0}$ une martingale bornée dans L^p, c.à.d tq. $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|X_n\|_p < \infty$. Alors il existe une v.a. X_∞ tq $X_n \xrightarrow[n \to \infty]{\text{p.s. et } L^p} X_\infty$.

Fixons une martingale (X_n) bornée dans L^p.

Exo 1 : • Utiliser l'inégalité de Jensen pour montrer que, pour une v.a. Z et $1 \leq q \leq p$ on a

$$\|Z\|_q \leq \|Z\|_p$$

• Déduire que $(X_n)_{n \geq 0}$ est bornée dans L^1 et donc converge p.s. vers une variable X_∞.

- Montrer que si une suite de v.a. $(Z_n)_{n\geq 0}$ converge dans L^p (pour un $p\geq 1$) vers une v.a. Z_∞, alors il existe une sous-suite $(Z_{\sigma(n)})_{n\geq 0}$ qui converge vers Z_∞ p.s.

- Déduire que la limite p.s. de $(X_n)_n$, qu'on note X_∞, est l'unique limite dans L^p possible pour $(X_n)_n$.

Exo: Soient $(M_n)_{n\geq 0}$ une sous-martingale et S, T des t.a. tq $S \leq T < \infty$ p.s. Montrer que

$$\mathbb{E}(X_S) \leq \mathbb{E}(X_T).$$

Indication: utiliser le processus prévisible $H_n = \mathbb{1}_{\{S < n \leq T\}}$

Exo: Soit $(M_n)_{n\geq 0}$ une sous-martingale. Montrer que pour $\lambda > 0$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$\lambda \mathbb{P}\left(\sup_{0\leq k\leq n} M_k \geq \lambda\right) \leq \mathbb{E}\left(\min\{M_n, 0\}\right).$$

Indication: Soit $\tau_a = \inf\{k\in[0,n] : M_k \geq a\} \wedge n$.

Observer la similarité avec l'inégalité de Markov:

$$\lambda \mathbb{P}\left(\sup_{0 \le k \le n} M_k \geq \lambda\right) = \lambda \mathbb{P}\left(M_{\tau_a} \geq \lambda\right) \leq$$

$$\overset{?}{\leq} \mathbb{E}\left(M_{\tau_a}\right).$$

Attention : peut-on déduire ? si M_{τ_a} n'est pas positive ps ? Comment passer de M_{τ_a} à M_n ? dans l'esperance ?

Exo : • Montrer que, pour $n \geq 0$,

$$\mathbb{E}\left(\sup_{k \le n} |X_k|^p\right) \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}\left(|X_n|^p\right).$$

• Déduire que $\mathbb{E}\left(\sup_n |X_n|^p\right) < \infty$.

• Conclure que la convergence de $|X_n|^p$ vers $|X_\infty|^p$ est dominée, donc que $X_n \xrightarrow{L^p} X_\infty$.

Indication : Appliquer l'exercice précédent à $|X_n|$.

Utiliser (et montrer) que pour une v.a. positive Z

$$\mathbb{E}(Z^p) = \int_0^\infty \lambda^{p-1} \mathbb{P}(Z \geq \lambda).$$