# Probabilités Exercices. 29/03/17

## semaine 6 : martingales

**Exo 1 :** Soient $(X_n)$ une martingale et $\tau$ un temps d'arrêt tel que $\tau < \infty$ p.s. et $(X_{n \wedge \tau})_{n \geq 0}$ est bornée par une constante $M$.

- Montrer que $\mathbb{E}(X_\tau) = \mathbb{E}(X_0)$.

- Soit $(Z_n)_{n \geq 0}$ une suite de v.a. à valeurs dans $\{\pm 1, 0\}$, i.i.d., d'esperance $0$. Posons $S_n = \sum_{k=1}^{n} Z_k$.

Calculer la probabilité que $S_n$ atteint $a$ avant $-b$, pour $a, b > 0$

**Exo 2 :** Soient $(X_n)_{n \geq 0}$ une sous-martingale et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe croissante, telle que $\varphi(X_n) \in L^1$ pour tout $n$. Montrer que $(\varphi(X_n))_{n \geq 0}$ est une sous-martingale.

Donner un contre-exemple si on ne suppose pas $\varphi$ croissante.

Exo 3 : Soit $S_n$ une marche aléatoire symmetrique sur $\mathbb{Z}$. ( $S_n = \sum_{k=1}^{n} Z_k$ ou $(Z_k)_k$ sont i.i.d. avec $\mathbb{P}(Z_k = +1) = \mathbb{P}(Z_k = -1) = 1/2$. ).

Montrer que $(S_n^2 - n)$ est une martingale.

Soit $T_m = \inf\{n \mid |S_n| = m\}$.

Calculer $\mathbb{E}(T_m)$.

Posons $T_{a,b} = \inf\{n \mid S_n = a \text{ ou } S_n = -b\}$ $a,b > 0$.

Avez vous une idée pour calculer $\mathbb{E}(T_{a,b})$?