PROBABILITÉS
Exercices semaine 5

Exercice 1 (TCL pour des temps d'arrêt)**.**

(a) Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a. i.i.d de moyenne 0 et variance σ^2. De plus soit (N_n) une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendantes des (X_n) tels qu'il existe une suite a_n tendant vers ∞ avec $N_n/a_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 1$.
Montrer alors que $Z_n = \frac{1}{\sqrt{a_n}} \sum_{k=1}^{N_n} X_k$ converge en loi vers une gausienne de moyenne 0 et variance σ^2.
Indication: poser $\tilde{Z}_n = \frac{1}{\sqrt{a_n}} \sum_{k=1}^{a_n} X_k$, montrer que $Z_n - \tilde{Z}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 0$ et utiliser le TCL pour $\tilde{Z}_n$.

(b) Supposons que (X_n) est une suite de v.a. i.i.d. positives, de moyenne μ et variance σ^2. Posons $T_n = \sup\{m \geq 0 : S_m \leq n\}$. Montrer que

$$\frac{1}{\sqrt{n/\mu}}\big(\mu T_n - n\big) \xrightarrow{(d)} \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

Indication: Montrer que $\mu T_n/n \xrightarrow{\mathbb{P}} 1$ et utiliser le point precedent pour les variables $X_i - \mu$.

(c) Supposons que les variables X_i du point précédent sont des variables de Bernoulli. Montrer alors que les variables $(T_{n+1} - T_n)_{n\geq 0}$ sont i.i.d., de loi à spécifier. Retrouver le résultat précédent, plus directement.

Exercice 2 (Sondages)**.**

Soient μ une loi de probabilité sur $\mathbb{R}$ et $(X_n)_n$ des v.a. i.i.d de loi μ, définies sur un espace de probabilité Ω. Imaginons qu'on veut déterminer la loi μ à partir d'un grand nombre d'échantillons $X_1, \ldots, X_n$. On pose:

$$\mu_n(\omega) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \delta_{X_k(\omega)},$$

ou δ_x represente la mesure de Dirac en x. **Attention!** μ_n est ainsi une mesure aléatoire sur $\mathbb{R}$. Le but de cet exercice est de montrer que $\mu_n \xrightarrow{p.s.} \mu$.

(a) Montrer que pour tout $\omega \in \Omega$, $\mu_n(\omega)$ est une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$. Ecrire $\mu_n(\omega)(A)$ en fonction des variables X_i pour $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

(b) Soit $H \subset \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ un ensemble dense et dénombrable (on admet l'existence d'un tel ensemble). Pour $\omega \in \Omega$, montrer que $\mu_n(\omega) \xrightarrow{(d)} \mu$ si et seulement si

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(X_k(\omega)) \to \int_{\mathbb{R}} f(x) d\mu(x), \qquad \forall f \in H.$$

(c) Conclure que $\mu_n \xrightarrow{p.s.} \mu$ dans la topologie de la convergence en distribution. Plus précisement, montrer que

$$\mathbb{P}\Big(\big\{\omega \in \Omega :\ \mu_n(\omega) \xrightarrow{(d)} \mu\big\}\Big) = 1.$$